Ψηφιακά Φίλτρα

Αναλογικά και ψηφιακά φίλτρα

20/5/2005 1

Αναλογικά και ψηφιακά φίλτρα

Στην επεξεργασία σήματος, η λειτουργία ενός φίλτρου είναι να απομακρύνει τα ανεπιθύμητα μέρη ενός σήματος, όπως ένα τυχαίο θόρυβο, ή να εξάγει χρήσιμα κομμάτια ενός σήματος, όπως οι συνιστώσες που βρίσκονται σε μια συγκεκριμένη περιοχή συχνοτήτων.

20/5/2005 2

Αναλογικά και ψηφιακά φίλτρα

Υπάρχουν δυο κύρια είδη φίλτρων, τα *αναλογικά* και τα *ψηφιακά*.

Είναι εντελώς διαφορετικά στη φυσική τους δομή και στον τρόπο με τον οποίο λειτουργούν.

Αναλογικά και ψηφιακά φίλτρα

- Ένα αναλογικό φίλτρο χρησιμοποιεί ηλεκτρονικά κυκλώματα που αποτελούνται από συστατικά όπως αντιστάσεις, πυκνωτές και τελεστικοί ενισχυτές για να παραχθεί η απαιτούμενη επίδραση φίλτρου. Τέτοια κυκλώματα φίλτρων χρησιμοποιούνται ευρέως σε εφαρμογές όπως μείωση θορύβου, ενίσχυση σήματος video, γραφικοί equalizer σε hi-fi συστήματα, και σε πολλές άλλες περιοχές.

- Υπάρχουν καλά καθορισμένες standard τεχνικές για σχεδίαση κυκλώματος αναλογικού φίλτρου, για δοσμένες απαιτήσεις. Σε όλα τα στάδια, το σήμα που φιλτράρεται είναι μια ηλεκτρική τάση ή ένα ρεύμα το οποίο είναι ευθέως ανάλογο της φυσικής ποσότητας (π.χ. ένας ήχος ή ένα σήμα video ή η έξοδος ενός μετατροπέα) που μας ενδιαφέρει.

Αναλογικά και ψηφιακά φίλτρα

- Ένα ψηφιακό φίλτρο χρησιμοποιεί ένα ψηφιακό επεξεργαστή για να εκτελέσει αριθμητικούς υπολογισμούς σε δειγματοληπτικές τιμές του σήματος.

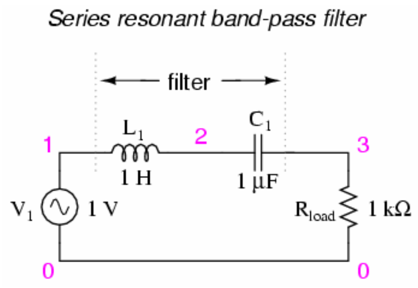
- Ο επεξεργαστής μπορεί να είναι ένας γενικού σκοπού υπολογιστής όπως ένα PC, ή ένας ειδικού σκοπού DSP (Digital Signal Processor) chirp.

Αναλογικά και ψηφιακά φίλτρα

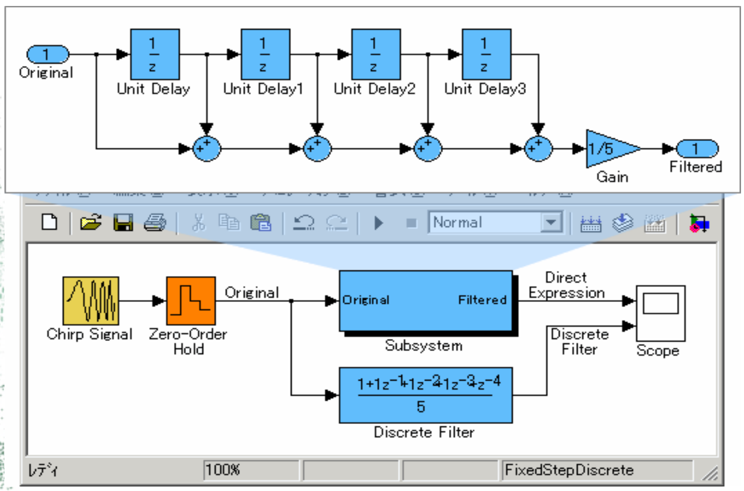
- Το αναλογικό σήμα εισόδου πρέπει πρώτα να δειγματοληφθεί και να ψηφιοποιηθεί με τη χρήση ενός ADC (analog to digital converter) μετατροπέα από αναλογικό σε ψηφιακό.Οι δυαδικοί αριθμοί που προκύπτουν, οι οποίοι αναπαριστούν διαδοχικές τιμές από τη δειγματοληψία του σήματος εισόδου, μεταφέρονται στον επεξεργαστή, που εκτελεί αριθμητικές πράξεις σ' αυτούς. Αυτοί οι υπολογισμοί τυπικά περιέχουν πολλαπλασιασμούς των τιμών εισόδου με σταθερές και άθροιση των γινομένων.

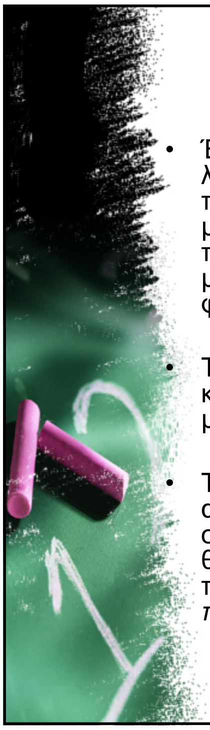
- Αν είναι απαραίτητο, τα αποτελέσματα αυτών των υπολογισμών, που αναπαριστούν τιμές από δειγματοληψία του φιλτραρισμένου σήματος, γίνονται έξοδοι μέσω ενός DAC (digital to analog converter) μετατροπέα από ψηφιακό σε αναλογικό, για να μετατραπεί το σήμα και πάλι σε αναλογική μορφή.

Αναλογικά φίλτρα



Ψηφιακά φίλτρα





Πλεονεκτήματα ψηφιακών φίλτρων

- Ένα ψηφιακό φίλτρο *είναι σε θέση να* ***προγραμματισθεί***. Η λειτουργία του καθορίζεται από ένα πρόγραμμα στη μνήμη του επεξεργαστή. Αυτό σημαίνει ότι το ψηφιακό φίλτρο μπορεί να αλλαχθεί εύκολα χωρίς να επηρεαστεί το κύκλωμα (hardware). Ένα αναλογικό φίλτρο, μπορεί μόνο να αλλαχθεί ξανασχεδιάζοντας το κύκλωμα του φίλτρου.

- Τα ψηφιακά φίλτρα *είναι εύκολα στη σχεδίαση, στη δοκιμή,* και *στην υλοποίηση* σε ένα γενικού σκοπού υπολογιστή ή σε μια εγκατάσταση.

- Τα χαρακτηριστικά των σχεδίων των κυκλωμάτων ενός αναλογικού φίλτρου, (ιδιαίτερα αυτών που περιέχουν ενεργά συστατικά) εξαρτώνται από την τάση και βασίζονται στη θερμοκρασία. Τα ψηφιακά φίλτρα δεν μαστίζονται από τέτοια προβλήματα και γι' αυτό είναι ιδιαίτερα *σταθερά, ως προς* τον χρόνο και τη θερμοκρασία.

Πλεονεκτήματα ψηφιακών φίλτρων

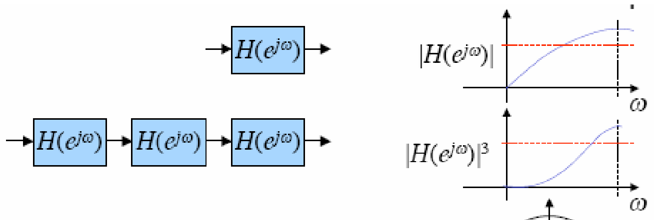
- Αντίθετα προς τα αναλογικά ισοδύναμα, τα ψηφιακά φίλτρα μπορούν να χειριστούν *χαμηλής συχνότητας σήματα* επακριβώς. Καθώς η ανάπτυξη της DSP τεχνολογίας συνεχίζει να αυξάνεται, τα ψηφιακά φίλτρα είναι σε θέση να εφαρμοστούν σε υψηλής συχνότητας σήματα στην RF (ράδιο συχνότητα) περιοχή, η οποία στο παρελθόν ήταν η αποκλειστικότητα της αναλογικής τεχνολογίας.

- Τα ψηφιακά φίλτρα είναι πολύ περισσότερο *ευμετάβλητα* στην ικανότητά τους να παράγουν σήματα με μια ποικιλία τρόπων: αυτό εμπεριέχει την ικανότητα μερικών τύπων ψηφιακών φίλτρων να προσαρμόζονται στις αλλαγές των χαρακτηριστικών του σήματος.

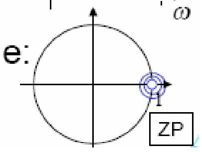
- Οι γρήγοροι DSP επεξεργαστές μπορούν να χειριστούν σύνθετους συνδυασμούς των φίλτρων παράλληλα ή σειριακά, κάνοντας τις απαιτήσεις του hardware σχετικά απλές σε σύγκριση με το ισοδύναμο αναλογικό σχέδιο του κυκλώματος.

Cascading Filters Σειριακά Φίλτρα

- Repeating a filter (cascade connection) makes its characteristics more abrupt:

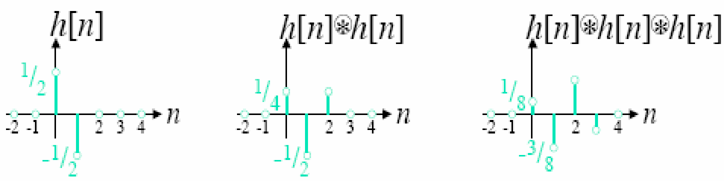


- Repeated roots in z-plane:



Cascading Filters

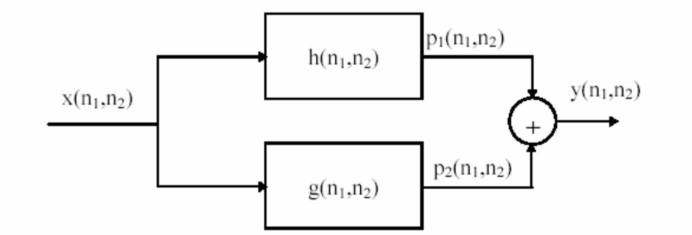
- Cascade systems are higher order e.g. longer (finite) impulse response:



- In general, cascade filters will not be optimal (...) for a given order

Parallel systems

Παράλληλοι Συνδυασμοί φίλτρων



$$
\begin{aligned}
y(n_1,n_2) &= p_1(n_1,n_2)+p_2(n_1,n_2)= \\
&= x**h + x**g = \\
&= x**(h+g) = \\
&= x**h_{\iota\sigma o\delta}
\end{aligned}
$$

Λειτουργία ψηφιακών φίλτρων

Ας υποθέσουμε ότι το αρχικό σήμα, το οποίο είναι ψηφιακά φιλτραρισμένο, βρίσκεται με τη μορφή μιας διαφοράς δυναμικού που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$V = x(t)$$

όπου *t* είναι ο χρόνος.

Αυτό το σήμα έχει δειγματοληφθεί ανά χρονικά διαστήματα μήκους *h*. Η τιμή του δείγματος σε χρόνο *t* = *ih* είναι

$$x_i = x(ih)$$

Λειτουργία ψηφιακών φίλτρων

Έτσι οι ψηφιακές τιμές μεταφερόμενες από τον ADC στον επεξεργαστή μπορούν να αναπαρασταθούν από την ακολουθία

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots$

ανταποκρινόμενες στις τιμές του σήματος της κυματομορφής σε χρόνους

$t = 0, h, 2h, 3h, \ldots$

(όπου $t = 0$ είναι η στιγμή στην οποία η δειγματοληψία αρχίζει).

Σε χρόνο $t = nh$ (όπου n είναι θετικός ακέραιος αριθμός), οι τιμές που είναι στη διάθεση του επεξεργαστή και είναι αποθηκευμένες στη μνήμη, είναι

$x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n.$

Λειτουργία ψηφιακών φίλτρων

Σημειώστε ότι οι ψηφιακές τιμές x_{n+1}, x_{n+2} κ.λ.π. δεν είναι διαθέσιμες γιατί δεν έχουν υπολογιστεί ακόμη!

Η ψηφιακή έξοδος από τον μικροεπεξεργαστή στο DAC αποτελείται από την ακολουθία των τιμών

$y_0, y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n.$

Γενικά, η τιμή του y_n υπολογίζεται από τις τιμές $\mathbf{x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n}$.

Ο τρόπος με τον οποίο υπολογίζονται τα y από τα x καθορίζει την ενέργεια του φιλτραρίσματος του ψηφιακού φίλτρου.

Παραδείγματα απλών ψηφιακών φίλτρων

UNITY GAIN FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΜΟΝΑΔΙΑΙΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ)

$$y_n = x_n$$

Κάθε εξαγόμενη τιμή y_{η} είναι ακριβώς η ίδια όπως η αντίστοιχη εισαγόμενη τιμή x_n:

$y_0 = x_0$
$y_1 = x_1$
$y_2 = x_2$

... κ.τ.λ.

Αυτό είναι μια συνηθισμένη υπόθεση στην οποία το φίλτρο *δεν έχει καμιά επίδραση* στο σήμα.

SIMPLE GAIN FILTER
(ΦΙΛΤΡΟ ΑΠΛΟΥ ΚΕΡΔΟΥΣ)

yn = Kxn (K = σταθερό)

Αυτό απλά πολλαπλασιάζει ένα σταθερό όρο *K* σε κάθε εισαγόμενη τιμή:

$\mathbf{y_0 = Kx_0}$
$\mathbf{y_1 = Kx_1}$
$\mathbf{y_2 = Kx_2}$
... κ.τ.λ.

Το *K* > 1 κάνει το φίλτρο έναν *ενισχυτή* , ενώ το 0 < *K* < 1 το κάνει έναν «υποβιβαστή». Το *K* < *0* ανταποκρίνεται σε έναν *«αντιστρέφοντα» ενισχυτή*. Το φίλτρο μοναδιαίου κέρδους είναι η ειδική περίπτωση όπου *K* = 1.

PURE DELAY FILTER
(ΦΙΛΤΡΟ ΚΑΘΑΡΗΣ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΗΣ)

yn = x_{n-1}

Η εξαγόμενη τιμή σε χρόνο *t* = *nh* είναι απλά η εισαγόμενη σε χρόνο *t* = *(n-1)h* δηλ. το σήμα καθυστερεί κατά χρόνο *h*:

$\mathbf{y_0 = x_{-1}}$
$\mathbf{y_1 = x_0}$
$\mathbf{y_2 = x_1}$
$\mathbf{y_3 = x_2}$
… κ.τ.λ.

Σημειώστε ότι επειδή η δειγματοληψία υποτίθεται ότι αρχίζει σε *t* = *0*, η εισαγόμενη τιμή *x-1* σε *t* = *-h* είναι αδιευκρίνιστη. Είναι σύνηθες να παίρνουμε την τιμή αυτή (και κάθε άλλη τιμή του *x* προηγούμενη του *t* = *0*) ως μηδέν.

TWO-TERM DIFFERENCE FILTER (ΦΙΛΤΡΟ ΔΙΑΦΟΡΑΣ ΔΥΟ ΟΡΩΝ)

$y(n) = x(n) – x(n-1)$

Η εξαγόμενη τιμή σε $t = nh$ είναι ίση με τη διαφορά ανάμεσα στον τρέχοντα εισαγόμενο χρόνο x_n και στον προηγούμενο εισαγόμενο $_{xn-1}$:

y(0) = x(0) – x(-1)
y(1) = x(1) – x(0)
y(2) = x(2) – x(1)
y(3) = x(3) – x(2)
... κ.λ.π.

Το εξαγόμενο είναι η αλλαγή του εισαγόμενου βάσει των περισσότερο πρόσφατων εισαγωγών.

TWO-TERM AVERAGE FILTER

(ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΟΥ ΔΥΟ ΟΡΩΝ)

$yn = (xn + xn-1) / 2$

Το εξαγόμενο είναι ο μέσος όρος (αριθμητικός μέσος) του τρέχοντος και προηγούμενου εισαγόμενου:

y0 = (x0 + x-1) / 2
y1 = (x1 + x0) / 2
y2 = (x2 + x1) / 2
y3 = (x3 + x2) / 2
... κ.λ.π.

Αυτός είναι ένας απλός τύπος βαθυπερατού φίλτρου, επειδή αναμένεται να εξαλείψει υψηλής συχνότητας διακυμάνσεις σε ένα σήμα.

THREE-TERM AVERAGE FILTER
(ΦΙΛΤΡΟ ΜΕΣΟΥ ΤΡΙΩΝ ΟΡΩΝ)

$$y(n) = [x(n) + x(n-1) + x(n-2)] / 3$$

Αυτό είναι παρόμοιο με το προηγούμενο παράδειγμα, αλλά ο μέσος όρος λαμβάνεται από την τρέχουσα και δύο προηγούμενες εισαγωγές:

$y0 = [x(0) + x(-1) + x(-2)] / 3$
$y1 = [x(1) + x(0) + x(-1)] / 3$
$y2 = [x(2) + x(1) + x(0)] / 3$
$y3 = [x(3) + x(2) + x(1)] / 3$
... κ.λ.π.

Όπως και πριν, το *x(-1)* και το *x(-2)* έχουν ληφθεί για να είναι μηδέν.

20/5/2005 23

CENTRAL DIFFERENCE FILTER
(ΦΙΛΤΡΟ ΚΕΝΤΡΙΚΗΣ ΔΙΑΦΟΡΑΣ)

$$y(n) = (x(n) – x(n-2)) / 2$$

Αυτό είναι παρόμοιο στην επίδραση του με το φίλτρο διαφοράς δύο όρων. Το εξαγόμενο είναι ίσο με τη μισή αλλαγή στο εισαγόμενο σήμα, για δύο μη γειτνιάζουσες προηγούμενες ψηφιακές τιμές:

$y(0) = (x(0) – x(-2)) / 2$
$y(1) = (x(1) – x(-1)) / 2$
$y(2) = (x(2) – x(0)) / 2$
$y(3) = (x(3) – x(1)) / 2$
... κ.λ.π.

20/5/2005 24

Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Ως τάξη ενός ψηφιακού φίλτρου μπορεί να οριστεί *ο αριθμός των προηγούμενων εισαγωγών* (αποθηκευμένων στη μνήμη του επεξεργαστή) ο οποίος χρησιμοποιείται για να υπολογιστεί το τρέχον εξαγόμενο.

20/5/2005 25

Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Παράδειγμα (1):

$$y(n) = x(n)$$

Αυτό είναι *ένα μηδενικής τάξης φίλτρο*, από τη στιγμή που το τρέχον εξαγόμενο *y(n)* εξαρτάται μόνο από το τρέχον εισαγόμενο *x(n)* και όχι από όποιες άλλες προηγούμενες εισαγωγές.

20/5/2005 26

Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Παράδειγμα (2):

y(n) = Kx(n)

Η τάξη αυτού του φίλτρου είναι πάλι *μηδέν*, αφού δεν απαιτούνται προηγούμενοι είσοδοι για να δώσουν την τρέχουσα εξαγόμενη τιμή.

20/5/2005 27

Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Παράδειγμα (3):

y(n) = x(n-1)

Αυτό είναι φίλτρο πρώτης τάξης, καθώς μια προηγούμενη εισαγωγή (*x(n-1)*) απαιτείται για να υπολογίσουμε το *y(n)* . (Σημειώστε ότι αυτό το φίλτρο ταξινομείται ως πρώτης τάξης, γιατί χρησιμοποιεί μια *προηγούμενη εισαγωγή*, ακόμα και όταν η τρέχουσα εισαγωγή δεν χρησιμοποιείται).

20/5/2005 28

Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Παράδειγμα (4):

$$y(n) = x(n) - x(n-1)$$

Αυτό είναι πάλι ένα *πρώτης τάξης φίλτρο*, αφού μια προηγούμενη εισαγόμενη τιμή απαιτείται για να δώσει την τρέχουσα έξοδο.

20/5/2005 29

Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Παράδειγμα (5):

$$y(n) = (x(n) + x(n-1) + x(n-2)) /3$$

Για να υπολογίσουμε το τρέχον εξαγόμενο *y(n)*, δύο προηγούμενες είσοδοι (*x(n-1)* και *x(n-2)*) χρειάζονται. Συνεπώς αυτό είναι ένα *δεύτερης τάξης φίλτρο.*

20/5/2005 30

Τάξη ψηφιακού φίλτρου

Η τάξη ενός ψηφιακού φίλτρου μπορεί να είναι οποιοσδήποτε θετικός ακέραιος αριθμός.

Ένα μηδενικής τάξης φίλτρο (όπως αυτά στα παραδείγματα (1) και (2) παραπάνω) είναι δυνατό, αλλά χωρίς νόημα, από τη στιγμή που δεν φιλτράρει πραγματικά το εισαγόμενο σήμα.

Συντελεστές ψηφιακών φίλτρων

Όλα τα παραδείγματα ψηφιακών φίλτρων που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο τμήμα, μπορούν να γραφούν στις παρακάτω γενικές φόρμες:

Μηδενικής τάξης: $yn = a_0x(n)$

Πρώτης τάξης: $yn = a_0x(n) + a_1x(n-1)$

Δεύτερης τάξης: $yn= a_0x(n)+ a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$

Παρόμοιες εκφράσεις μπορούν να διατυπωθούν για φίλτρα κάθε τάξης.

Συντελεστές ψηφιακών φίλτρων

Οι σταθερές a_0, a_1, a_2, ...*που* εμφανίζονται σε αυτές τις εκφράσεις ονομάζονται *συντελεστές φίλτρων*. Οι τιμές αυτών των συντελεστών καθορίζουν τα χαρακτηριστικά ενός συγκεκριμένου φίλτρου.

20/5/2005 33

Αναδρομικά και μη αναδρομικά φίλτρα

Για όλα τα παραδείγματα των ψηφιακών φίλτρων που συζητήθηκαν μέχρι τώρα, η τρέχουσα έξοδος t (*y(n)*) υπολογίζεται μεμονωμένα από τις τρέχουσες και προηγούμενες *εισαγόμενες* τιμές

$(x(n), x(n-1), x(n-2), ...)$.

Αυτός ο τύπος φίλτρου ονομάζεται *μη αναδρομικό (FIR)*.

Ένα αναδρομικό *φίλτρο* (IIR) είναι αυτό, το οποίο χρησιμοποιεί ως εισαγόμενες τιμές και *προηγούμενες εξαγόμενες τιμές*. Αυτές, όπως και οι προηγούμενες εισαγόμενες τιμές, αποθηκεύονται στη μνήμη του επεξεργαστή.

20/5/2005 34

Αναδρομικά και μη αναδρομικά φίλτρα

- Η λέξη αναδρομικός κυριολεκτικά σημαίνει "επιστρέφω πίσω" και αναφέρεται στο γεγονός ότι τιμές που έχουν υπολογιστεί στο παρελθόν επιστρέφουν πίσω ως είσοδοι για τον υπολογισμό των νέων τιμών. Η έκφραση ενός αναδρομικού φίλτρου δεν εμπεριέχει μόνο τις εισαγόμενες τιμές ($x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$, ...) αλλά επίσης και προηγούμενες εξαγόμενες $y(n-1)$, $y(n-2)$, ...

- Από τον ορισμό αυτό, μπορεί να φαίνεται ότι τα αναδρομικά φίλτρα απαιτούν περισσότερους υπολογισμούς, από τη στιγμή που υπάρχουν προηγούμενοι εξαγόμενοι όροι στην έκφραση του φίλτρου όπως και εισαγόμενοι όροι. Όμως ισχύει συνήθως το αντίθετο. Για να επιτευχθεί μια δοσμένη απόκριση συχνότητας, με ένα αναδρομικό φίλτρο, γενικά απαιτείται χαμηλότερη τάξη φίλτρου, και συνεπώς λιγότεροι όροι που πρέπει να υπολογιστούν από τον επεξεργαστή, σε σύγκριση με ένα μη αναδρομικό φίλτρο.

FIR και IIR φίλτρα

Μερικοί προτιμούν μια εναλλακτική ορολογία κατά την οποία ένα μη αναδρομικό φίλτρο είναι γνωστό σαν FIR (*F*inite *I*mpulse *R*esponse) φίλτρο,και ένα αναδρομικό φίλτρο σαν IIR (*I*nfinite *I*mpulse *R*esponse) φίλτρο. Αυτοί οι όροι αναφέρονται στη διαφοροποίηση της **impulse response** των δύο τύπων φίλτρου.

FIR και IIR φίλτρα

Η impulse response ενός ψηφιακού φίλτρου είναι η εξαγόμενη ακολουθία από το φίλτρο, όταν μια *unit impulse* εφαρμόζεται στην ίδια του την είσοδο. (Μια unit impulse είναι μια πολύ απλή εισαγόμενη ακολουθία που αποτελείται από μια τιμή 1 σε χρόνο $t = 0$, ακολουθούμενη από μηδενικά σε όλα τα διαδοχικά στιγμιαία δείγματα).

Ένα **FIR** φίλτρο είναι κάποιο του οποίου η impulse response είναι μετρήσιμης διάρκειας .Ένα **IIR** φίλτρο είναι κάποιο του οποίου η impulse response (θεωρητικά) συνεχίζει για πάντα, επειδή οι περιοδικά επαναλαμβανόμενοι όροι (προηγούμενη έξοδος) ανατροφοδοτούν συνεχώς με ενέργεια την είσοδο του φίλτρου. Ο όρος IIR δεν είναι πολύ ορθός, επειδή οι πραγματικές impulse response σχεδόν όλων των IIR φίλτρων μειώνονται στο μηδέν σε ένα μετρήσιμο χρόνο. Ωστόσο, αυτοί οι δύο όροι χρησιμοποιούνται ευρέως.

Παράδειγμα αναδρομικού φίλτρου

Ένα παράδειγμα αναδρομικού φίλτρου είναι το εξής:

$$y(n) = x(n) + y(n-1)$$

Με άλλα λόγια το φίλτρο καθορίζει το τρέχον εξαγόμενο (*yn*) προσθέτοντας το τρέχον εισαγόμενο (*xn*) στο προηγούμενο εξαγόμενο (*yn-1*).

Έτσι:

$y(0) = x(0) + y(-1)$
$y(1) = x(1) + y(0)$
$y(2) = x(2) + y(1)$
$y(3) = x(3) + y(2)$
... κ.λ.π.

Σημειώστε ότι το $y(-1)$ (όπως και το $x(-1)$) είναι απροσδιόριστα, και θεωρούνται συνήθως μηδέν.

Παράδειγμα αναδρομικού φίλτρου

Ας δούμε την λειτουργία αυτού του φίλτρου με περισσότερη λεπτομέρεια. Αν σε κάθε μία από τις παραπάνω εκφράσεις αντικαταστήσουμε το *yn-1* με την τιμή που δίνεται από τις προηγούμενες εκφράσεις, θα πάρουμε:

y(0) = x(0) + y(-1) = x(0)
y(1) = x(1) + y(0) = x(1) + x(0)
y(2) = x(2) + y(1)= x(2) + x(1) + x(0)
y(3) = x(3) + y(2) = x(3) + x(2) + x(1) + x(0)
... κ.λ.π.

Έτσι βλέπουμε ότι το *y(n)*, η έξοδος στο *t = nh*, είναι ίσο με το άθροισμα του τρέχοντος εισαγόμενου *x(n)* και όλων των προηγούμενων εισαγομένων. Συνεπώς αυτό το φίλτρο αθροίζει (ή ολοκληρώνει) τις εισαγόμενες τιμές, άρα έχει ακριβώς το ίδιο αποτέλεσμα με έναν αναλογικό ολοκληρωτή.

20/5/2005 39

Παράδειγμα αναδρομικού φίλτρου

Σε αυτό το παράδειγμα φαίνεται ένα σημαντικό και χρήσιμο χαρακτηριστικό των αναδρομικών φίλτρων. Η οικονομία με την οποία υπολογίζονται οι εξαγόμενες τιμές, σε σύγκριση με τα μη αναδρομικά φίλτρα. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα κάθε εξαγόμενη τιμή προκύπτει από μία απλή πρόσθεση δύο αριθμών.

Για παράδειγμα, για να υπολογίσουμε την εξαγόμενη τιμή στον χρόνο *t = 10h*, το αναδρομικό φίλτρο χρησιμοποιεί την έκφραση –

y(10) = x(10) + y(9)

Για να πετύχουμε το ίδιο αποτέλεσμα με ένα μη αναδρομικό φίλτρο θα έπρεπε να χρησιμοποιήσουμε την εξής έκφραση

y(10) = x(10) + x(9) + x(8) + x(7) + x(6) + x(5) + x(4) + x(3) + x(2) + x(1) + x(0)

Αυτό θα απαιτούσε πολύ περισσότερες πράξεις πρόσθεσης, καθώς επίσης και πολύ περισσότερες θέσεις μνήμης.

20/5/2005 40

Τάξη αναδρομικού ψηφιακού φίλτρου (IIR)

Η τάξη ενός ψηφιακού φίλτρου, ορίστηκε πρωτύτερα, ως ο αριθμός των προηγούμενων εισαγόμενων τιμών οι οποίες πρέπει να αποθηκευτούν για να παράγουν μια έξοδο. Αυτός ο ορισμός είναι κατάλληλος για μη αναδρομικά φίλτρα (FIR), τα οποία χρησιμοποιούν μόνο τις τρέχουσες και προηγούμενες εισαγόμενες τιμές για να υπολογίσουν την τρέχουσα έξοδο. Στην περίπτωση των αναδρομικών φίλτρων, ο καθορισμός μπορεί να επεκταθεί όπως φαίνεται παρακάτω:

> **Η τάξη ενός αναδρομικού φίλτρου είναι ο *μεγαλύτερος αριθμός των προηγούμενων εισαγόμενων και εξαγόμενων τιμών που* απαιτούνται για να υπολογιστεί η τρέχουσα έξοδος.**

Αυτός ο ορισμός είναι αρκετά γενικός αφού εφαρμόζεται στα FIR και στα IIR φίλτρα.

Συντελεστές αναδρομικών (IIR) ψηφιακών φίλτρων

Από την παραπάνω συζήτηση, μπορούμε να δούμε ότι ένα αναδρομικό φίλτρο μοιάζει βασικά με ένα μη αναδρομικό φίλτρο, με την προσθήκη επιπλέον όρων εμπεριέχοντας προηγούμενες εισαγωγές (*y(n-1), y(n-2)*,.. .).

Ένα πρώτης τάξης αναδρομικό φίλτρο μπορεί να γραφεί στη γενική μορφή

$$yn = (a_0x(n) + a_1x(n-1) - b_1y(n-1)) / b_0$$

Σημειώστε το σημείο αφαίρεσης μπροστά από τον αναδρομικό όρο $b_1y(n-1)$, και τον παράγοντα $(1/b_0)$ που πολλαπλασιάζεται σε όλους τους συντελεστές. Ο λόγος που εκφράζουμε το φίλτρο με τέτοιο τρόπο, είναι για να μας επιτραπεί να ξαναγράψουμε την έκφραση στην παρακάτω συμμετρική μορφή:

$$b_0y(n) + b_1y(n-1) = a_0x(n) + a_1x(n-1)$$

Συντελεστές αναδρομικών (IIR) ψηφιακών φίλτρων

Στην περίπτωση ενός φίλτρου δεύτερης τάξης η γενική μορφή είναι:

$yn = [a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2) - b_1y(n-1) - b_2y(n-2)] / b_0$

Μια εναλλακτική αναδρομική μορφή αυτής της έκφρασης είναι:

$b_0y(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$

Σημειώστε τη σύμβαση ότι οι συντελεστές των εισαγόμενων τιμών (τα *x*) υποδηλώνονται με *a*, ενώ οι συντελεστές των εξαγόμενων τιμών (τα *y*) υποδηλώνονται με *b*.

20/5/2005 43

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ψηφιακού φίλτρου

Χρησιμοποιήσαμε δύο διαφορετικούς τρόπους για να εκφράσουμε την δράση ενός ψηφιακού φίλτρου:

Στον πρώτο τρόπο δίνοντας την εξαγόμενη τιμή *y(n)* απευθείας, και

Στο δεύτερο, δίνοντας μια συμμετρική έκφραση με όλους τους εξαγόμενους όρους (τα *y*) στη μια πλευρά, και όλους τους εισαγόμενους όρους (*τα x*) στην άλλη.

Έτσι, μπορούμε να εισάγουμε αυτό που αποκαλείται ***συνάρτηση μεταφοράς*** *ενός ψηφιακού φίλτρου.*

Αυτό επιτυγχάνεται από το συμμετρικό τρόπο έκφρασης του φίλτρου, και μας επιτρέπει να περιγράψουμε ένα φίλτρο με μια κατάλληλη, σύνθετη έκφραση. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καθορίσει πολλά από τα χαρακτηριστικά του φίλτρου, όπως είναι η απόκριση συχνότητας.

20/5/2005 44

Η συνάρτηση μεταφοράς ενός ψηφιακού φίλτρου

Τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης

Πρώτα απ' όλα, πρέπει να εισάγουμε τον συντελεστή μοναδιαίας καθυστέρησης, δηλώνοντάς τον με το σύμβολο

$$z^{-1}$$

Όταν εφαρμόζεται σε μια σειρά από ψηφιακές τιμές, ο τελεστής αυτός δίνει την *προηγούμενη τιμή* στη σειρά. Αυτό συνεπώς, εισάγει τη καθυστέρηση ενός δείγματος.

Εφαρμόζοντας τον τελεστή z^{-1} σε μια εισαγόμενη τιμή (ας πούμε στη $x(n)$) δίνει το προηγούμενο εισαγόμενο ($x(n-1)$):

$$z^{-1}\, x(n) = x(n-1)$$

Ο τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια εισαγόμενη ακολουθία:

$x(0) = 5$
$x(1) = -2$
$x(2) = 0$
$x(3) = 7$
$x(4) = 10$

Τότε:

$z^{-1}\, x(1) = x(0) = 5$
$z^{-1}\, x(2) = x(1) = -2$
$z^{-1}\, x(3) = x(2) = 0$

και κ.ο.κ. Σημειώστε ότι το z^{-1} $x(0)$ θα είναι $x(-1)$ το οποίο είναι άγνωστο (και συνήθως θεωρείται μηδέν, όπως έχουμε ήδη πει.)

Παρομοίως, εφαρμόζοντας το z^{-1} τελεστή σε μία εξαγόμενη τιμή δίνει την προηγούμενη εξαγόμενη τιμή:

$$z^{-1}\, y(n) = y(n-1)$$

Ο τελεστής μοναδιαίας καθυστέρησης

Εφαρμόζοντας τον τελεστή καθυστέρησης z^{-1} δύο φορές παράγεται μια καθυστέρηση δύο δειγμάτων:

$$\mathbf{z^{-1} (z^{-1} xn) = z^{-1} x(n-1) = x(n-2)}$$

Υιοθετούμε την (σαφώς λογική) συμφωνία

$$\mathbf{z^{-1} z^{-1} = z^{-2}}$$

Ο τελεστής *z-2* αναπαριστά μια καθυστέρηση *δύο δειγμάτων*:

$$\mathbf{z^{-2} x(n) = x(n-2)}$$

Αυτή η σημείωση μπορεί να επεκταθεί σε καθυστερήσεις των τριών ή περισσοτέρων δειγμάτων.

Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε αυτή τη σημείωση στην περιγραφή των αναδρομικών ψηφιακών φίλτρων. Θεωρείστε, για παράδειγμα, ένα γενικό δεύτερης τάξης φίλτρο, με συμμετρική μορφή υπό την έκφραση:

$$b_0y(n) + b_1y(n-1) + b_2y(n-2) = a_0x(n) + a_1x(n-1) + a_2x(n-2)$$

Θα κάνουμε χρήση των παρακάτω ταυτοτήτων:

$$y(n-1) = z^{-1} y(n)$$
$$y(n-2) = z^{-2} y(n)$$
$$x(n-1) = z^{-1} x(n)$$
$$x(n-2) = z^{-2} x(n)$$

Συνάρτηση Μεταφοράς

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκφράσεις εντός του ψηφιακού φίλτρου προκύπτει:

$$(b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})\, y(n) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})\, x(n)$$

Τροποποιώντας την παραπάνω ισότητα για να δώσει μια άμεση σχέση ανάμεσα στην εξαγόμενη και την εισαγόμενη τιμή του φίλτρο, παίρνουμε:

$$y(n) / x(n) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) / (b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$$

Αυτή είναι η γενική φόρμα της **συνάρτησης μεταφοράς** ενός αναδρομικού ψηφιακού φίλτρου δεύτερης τάξης (IIR).

Για ένα φίλτρο πρώτης τάξης, οι όροι του z^{-2} αγνοούνται. Για φίλτρα τάξης άνω των 2, εμπλέκονται ανώτερες δυνάμεις του z^{-1}, στον αριθμητή και στον παρονομαστή της συνάρτησης μεταφοράς.

Ένα μη αναδρομικό φίλτρο (FIR) έχει μια απλούστερη συνάρτηση μεταφοράς η οποία δεν εμπεριέχει καθόλου όρους στον παρονομαστή. Ο συντελεστής b_0 αναγνωρίζεται ως να ήταν ίσος με 1, και όλοι οι άλλοι *b* συντελεστές είναι μηδενικοί. Η συνάρτηση μεταφοράς ενός φίλτρου FIR δεύτερης τάξης μπορεί παρομοίως να εκφραστεί στη γενική της μορφή:

$$y(n) / x(n) = a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}$$

Παραδείγματα συνάρτησης μεταφοράς

Το φίλτρο μέσου τριών όρων, καθορίζεται από την έκφραση:

$$y(n) = 1/3\,(x(n) + x(n-1) + x(n-2))$$

μπορεί να γραφτεί χρησιμοποιώντας τον *z-1* τελεστή ως:

$$y(n) = 1/3\,(x(n) + z^{-1}\,x(n) + z^{-2}x(n))$$
$$= 1/3\,(1 + z^{-1} + z^{-2})\,x(n)$$

Συνεπώς η συνάρτηση μεταφοράς του φίλτρου είναι:

$$y(n)\,/\,x(n) = 1/3\,(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

The Z Transform

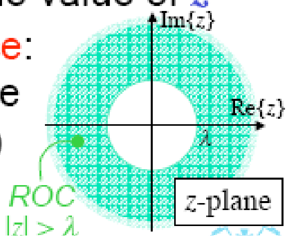
- Powerful tool for analyzing & designing DT systems
- Generalization of the DTFT:

$$G(z) = \mathcal{Z}\{g[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g[n]z^{-n} \quad \textit{Z Transform}$$

- z is complex...
  - $z = e^{j\omega} \rightarrow$ DTFT
  - $z = r\cdot e^{j\omega} \rightarrow \sum_n g[n]r^{-n}e^{-j\omega n}$ *DTFT of* $r^{-n}\cdot g[n]$

Region of Convergence (ROC)
Περιοχή Σύγκλησης

- Critical question:
  Does summation $G(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$
  converge (to a finite value)?
- In general, depends on the value of z
  $\rightarrow$ Region of Convergence:
  Portion of complex z-plane
  for which a particular $G(z)$
  will converge



Simple IIR Lowpass

$$H_{LP}(z) = K \frac{1+z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

max = 1
using $K=(1-\alpha)/2$

- Cutoff freq. ω_c from $\left|H_{LP}\left(e^{j\omega_c}\right)\right|^2 = \frac{\max}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(1-\alpha)^2}{4} \frac{\left(1+e^{-j\omega_c}\right)\left(1+e^{j\omega_c}\right)}{\left(1-\alpha e^{-j\omega_c}\right)\left(1-\alpha e^{j\omega_c}\right)} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\omega_c = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2} \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1-\sin\omega_c}{\cos\omega_c}}$$

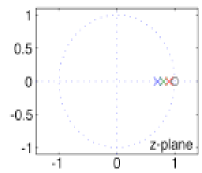
Design Equation

Simple IIR Highpass

$$H_{HP}(z) = K\frac{1-z^{-1}}{1-\alpha z^{-1}}$$

Pass $\omega = \pi \rightarrow H_{HP}(-1) = 1$

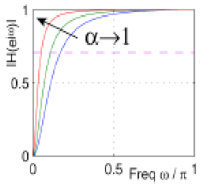
$\rightarrow K = (1+\alpha)/2$

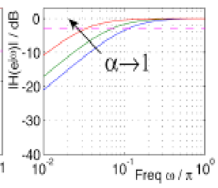


Design Equation:

$$\alpha = \frac{1-\sin\omega_c}{\cos\omega_c}$$

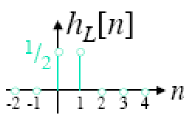
(again)



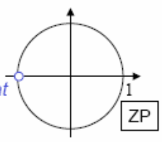


Simple FIR Lowpass

- $h_L[n] = \{\overset{}{\underset{\uparrow}{^1/_2}}\ ^1/_2\}$
  (2 pt moving avg.)



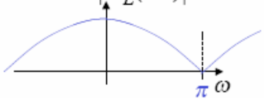
$$H_L(z) = \tfrac{1}{2}\left(1+z^{-1}\right) = \frac{z+1}{2z}$$



$e^{j\omega/2}+e^{-j\omega/2}$

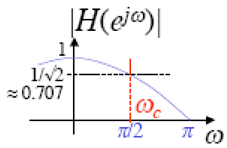
$$\Rightarrow H_L\left(e^{j\omega}\right) = e^{-j\omega/2}\cos(\omega/2)$$

$^1/_2$ sample delay



Simple FIR Lowpass

- Filters are often characterized by their cutoff frequency ω_c:



- Cutoff frequency is most often defined as the half-power point i.e.

$$\left|H\left(e^{j\omega_c}\right)\right|^2 = \tfrac{1}{2}\max\left\{\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right|^2\right\} \Rightarrow H = \tfrac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}$$

- If $\left|H\left(e^{j\omega}\right)\right| = \cos(\omega/2)$

then $\omega_c = 2\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}$

20/5/2005 55

FIR & IIR

- FIR = finite impulse response
  $\Leftrightarrow$ no feedback in block diagram
  $\Leftrightarrow$ no poles (only zeros)
- IIR = infinite impulse response
  $\Leftrightarrow$ poles (and perhaps zeros)

20/5/2005 56

ΣΧΕΔΙΑΣΗ FIR ΨΗΦΙΑΚΩΝ ΦΙΛΤΡΩΝ ΜΕ ΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΩΝ ΠΑΡΑΘΥΡΩΝ

Ένα αιτιατό FIR φίλτρο μήκους *L* περιγράφεται από την εξίσωση διαφοράς:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{L} a_k x(n-k) = h(n) * x(n)$$

με συνάρτηση μεταφοράς της μορφής:

$$H(z) = \sum_{x=0}^{L} h(n) z^{-n} = h(0) + h(1) z^{-1} + ... + h(L) z^{-L}$$

όπου οι συντελεστές α_k αποτελούν τους όρους *h*(*n*) της κρουστικής απόκρισης του φίλτρου. Επομένως, για να σχεδιαστεί το φίλτρο, αρκεί να προσδιοριστεί η πεπερασμένη ακολουθία *h*(*n*).

Επιλογή συνάρτησης Window και τάξης φίλτρου

Στον σχεδιασμό FIR ψηφιακών φίλτρων με την μέθοδο Window, υπάρχουν δύο βασικοί παράγοντες που μπορούν να αλλάξουν ώστε να προσεγγίσουμε καλλίτερα την επιθυμητή απόδοση:

- Η συνάρτηση Window
- Η τάξη του φίλτρου.

Τάξη Φίλτρου

Η τάξη του φίλτρου καθορίζει το πλάτος της ζώνης διέλευσης: όσο υψηλότερη είναι η τάξη τόσο πιο "στενή" είναι η μετάβαση από την ζώνη διέλευσης στην ζώνη αποκοπής.

Συνάρτηση Window

Η επιλογή συνάρτησης window καθορίζεται από την απαιτούμενη τιμή της εξασθένησης στην ζώνη αποκοπής.

- Rectangular
- Hanning
- Hamming
- Blackman

FIR Filter Design

- Rectangular:

$$w[n] = 1 \quad -M \le n \le M$$

- Hann:

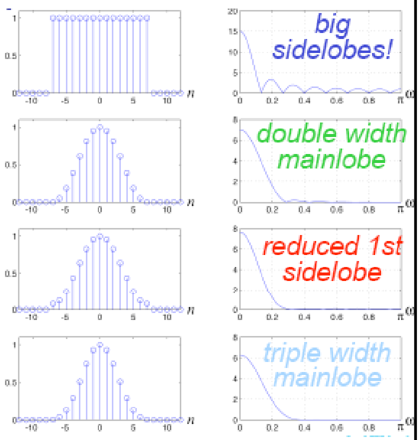
$$0.5 + 0.5\cos(2\pi \tfrac{n}{2M+1})$$

- Hamming:

$$0.54 + 0.46\cos(2\pi \tfrac{n}{2M+1})$$

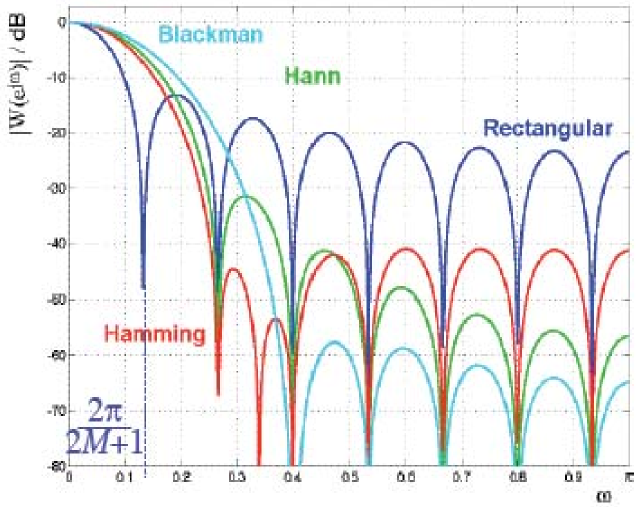
- Blackman:

$$0.42 + 0.46\cos(2\pi \tfrac{n}{2M+1}) + 0.08\cos(2\pi \tfrac{2n}{2M+1})$$



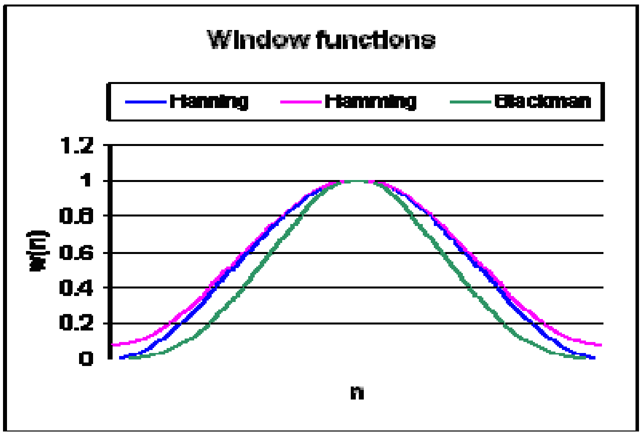
20/5/2005 61

Window Shapes for FIR Filters



20/5/2005 62

Παράδειγμα



20/5/2005 63

Σχεδίαση δισδιάστατων FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων.

Σημαντικό πλεονέκτημα των δισδιάστατων FIR φίλτρων είναι ότι μπορούν να σχεδιαστούν ώστε η απόκριση συχνότητάς τους να είναι πραγματική, με αποτέλεσμα να μην προκαλούν μεταβολή στη φάση των διαφόρων συχνοτήτων του σήματος. Για το λόγο αυτό καλούνται φίλτρα μηδενικής φάσης και χρειάζεται γι τούτο να έχουν συμμετρική κρουστική απόκριση γύρω από το δείγμα 0:

$$h(n)=h(-n)$$

20/5/2005 64

Σχεδίαση δισδιάστατων FIR φίλτρων με τη μέθοδο των παραθύρων.

Κρουστική απόκριση ιδανικού δισδιάστατου FIR φίλτρου και αντίστοιχο μέτρο απόκρισης συχνότητας.