ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

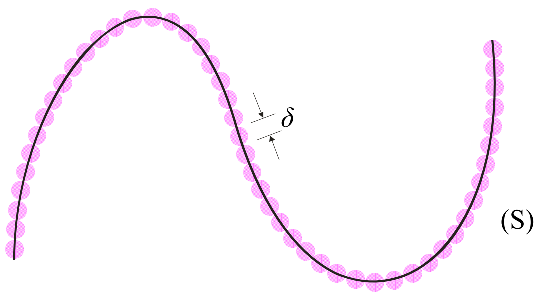
Περιγραφή των φυσικών δομών που χαρακτηρίζονται από
ακανόνιστη, τραχεία ή τεμαχισμένη μορφή

Ανωμαλίες των δομών που ποικίλουν ως προς το μέγεθος
και χαρακτηρίζονται από μια ειδική σχέση μεταβολής της κλίμακας

Η κλασματική γεωμετρία χαρακτηρίζει τη δομή
ενός συνόλου σημείων του χώρου
εκφρασμένη μέσω ενός αριθμού D
που ονομάζεται κλασματική διάσταση

- γεωμετρία (θεωρία διαστάσεων)
- κλασματική διάσταση (fractal dimension)
- αυτο-ομοιότητα (self-similarity)
- αυτο-ομοπαραλληλία (self-affinity)

ΜΕΓΕΘΟΣ ΚΑΜΠΥΛΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΛΕΓΧΟΥ: $h(\delta) = \gamma\, \delta^{d}$

$\gamma = 1$	$\gamma = \frac{\pi}{4}$	$\gamma = \frac{\pi}{6}$
ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΟ ΤΜΗΜΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ ΚΥΒΟΣ	ΔΙΣΚΟΣ	ΣΦΑΙΡΑ

ΔΙΑΣΤΑΣΗ HAUSDORFF-BESICOVITCH

ΜΕΤΡΙΚΗ: $M_{\mathrm{d}} = \sum h(\delta) = \sum \gamma\, \delta^{d}$

$$\delta \to 0 \begin{cases} M_{\mathrm{d}} \to 0 \\ M_{\mathrm{d}} \to \infty \end{cases}$$

$$M_{\mathrm{d}} = \sum \gamma\, \delta^{d} = \gamma\, N(\delta)\, \delta^{d} \xrightarrow{\delta \to 0} \begin{cases} 0, \text{ όταν } d > D \\ \infty, \text{ όταν } d < D \end{cases}$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ

Στον ευκλείδιο χώρο $\mathbf{R}^{\mathrm{E}}$:

$\forall r > 0$ $\quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{E}}) \longrightarrow r(x) = (rx_1, rx_2, \ldots, rx_{\mathrm{E}})$

$$S \longrightarrow S(r)$$

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ ΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑΣ

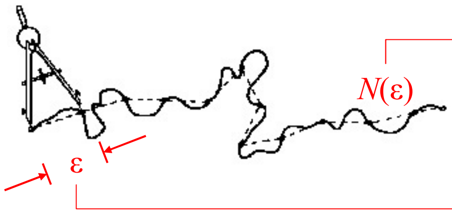
Στον ευκλείδιο χώρο $\mathbf{R}^{\mathrm{E}}$:

$\forall r = (r_1, r_2, \ldots, r_{\mathrm{E}}), r_{\mathrm{i}} > 0$

$$x = (x_1, x_2, \ldots, x_{\mathrm{E}}) \longrightarrow r(x) = (r_1 x_1, r_2 x_2, \ldots, r_{\mathrm{E}} x_{\mathrm{E}})$$

$$S \longrightarrow S(r)$$

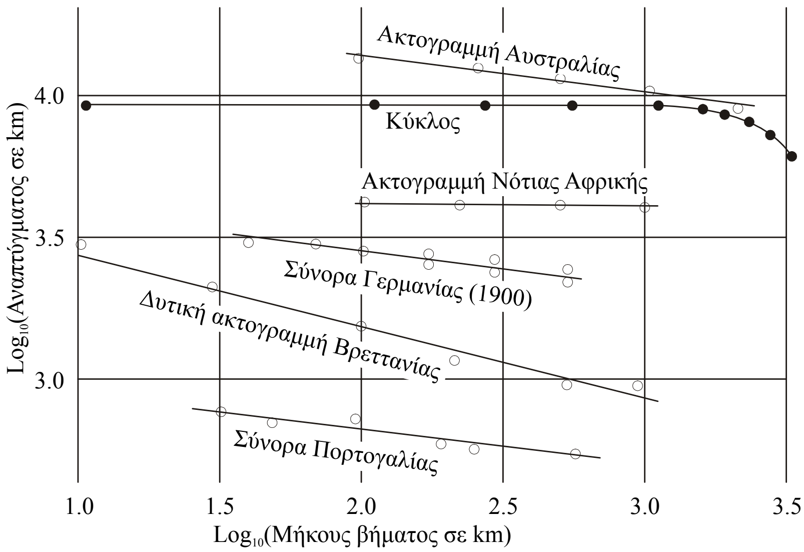
ΜΗΚΟΣ ΑΚΑΝΟΝΙΣΤΩΝ ΓΡΑΜΜΩΝ



$$L(\varepsilon) = N(\varepsilon)\,\varepsilon$$

Richardson (1961): $L(\varepsilon) = k\,\varepsilon^{1-D}$

$$k > 0 \quad D \geq 1$$



ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

Η κλασματική διάσταση (D) ενός συνόλου σημείων
του χώρου είναι η διάσταση Hausdorff-Besicovitch

Η κλασματική διάσταση κυμαίνεται ως τιμή μεταξύ
της τοπολογικής (D_T) και της ευκλείδιας διάστασης (D_E)

Γραμμές: $D_\mathrm{T} = 1 < D < 2 = D_\mathrm{E}$

Επιφάνειες: $D_\mathrm{T} = 2 < D < 3 = D_\mathrm{E}$

Η κλασματική διάσταση D συνόλων σημείων του χώρου εκφράζει
το βαθμό με τον οποίο μια γραμμή «γεμίζει» το ευκλείδιο επίπεδο,
και αντίστοιχα, μια επιφάνεια τον ευκλείδιο χώρο

ΑΥΤΟ-ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ

Κλασματικά σύνολα είναι σχήματα των οποίων τα
επί μέρους τμήματα είναι όμοια προς το όλον
σύμφωνα με μια ορισμένη γεωμετρική διαδικασία

ΑΥΤΟ-ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ, με λόγο ομοιότητας $r(N)$:

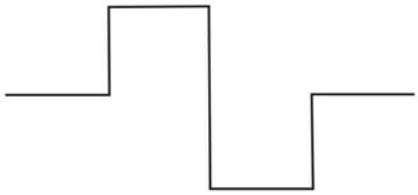
$$r(N) = \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{1}{D}}$$

Κλασματική διάσταση αυτό-όμοιων σχημάτων: $D = \dfrac{\log N}{\log \dfrac{1}{r(N)}}$

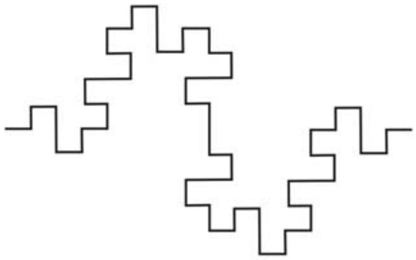
ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΗ ΝΗΣΟΣ ΤΟΥ ΚΟCH

Ευθύγραμμο τμήμα:

$r(N) = \frac{1}{4} \quad N = 8$



$r(N) = \frac{1}{16} \quad N = 64$



$D = 1.50$

ΑΥΤΟ-ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ / ΑΥΤΟ-ΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *αυτο-όμοιο* (self-similar), ως προς ένα λόγο r, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία είτε ταυτίζεται άμεσα είτε μετά από στροφή ή και μετάθεση με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από μετασχηματισμό ομοιότητας με λόγο r

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *αυτο-ομοπαράλληλο* (self-affine), ως προς ένα διανυσματικό λόγο $r=(r_1, r_2, \ldots, r_E)$, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία είτε ταυτίζεται άμεσα είτε μετά από στροφή ή και μετάθεση με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από ομοπαράλληλο μετασχηματισμό με λόγο το διάνυσμα r

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΑΥΤΟ-ΟΜΟΙΟΤΗΤΑ / ΑΥΤΟ-ΟΜΟΠΑΡΑΛΛΗΛΙΑ

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *στατιστικά αυτο-όμοιο* (statistical self-similar), ως προς ένα λόγο r, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία ταυτίζεται σε όλες τις στατιστικές εκτιμήτριες με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από μετασχηματισμό ομοιότητας με λόγο r

Κάθε φραγμένο σύνολο σημείων S ονομάζεται *στατιστικά αυτο-ομοπαράλληλο* (statistical self-affine), ως προς ένα διανυσματικό λόγο $r=(r_1, r_2,\ldots, r_E)$, αν το σύνολο S αποτελείται από την ένωση N διακριτών υποσυνόλων, κάθε ένα από τα οποία ταυτίζεται σε όλες τις στατιστικές εκτιμήτριες με το σύνολο r(S), που προέρχεται από το S ύστερα από ομοπαράλληλο μετασχηματισμό με λόγο το διάνυσμα r

ΑΡΧΕΣ ΠΡΟΣΔΙΟΡΙΣΜΟΥ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

Σχέση κλασματικής διάστασης επιφάνειας (D_S)
και παράγωγων γραμμών (D_L) (τομές)

$$\boxed{D_S = D_L + 1}$$

Αυτο-ομοπαράλληλες γραμμές
→ ολική (global) → $D = 1$ → ΜΑΚΡΟΣΚΟΠΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
→ τοπική (local) → $D > 1$ → ΜΙΚΡΟΣΚΟΠΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΒΗΜΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

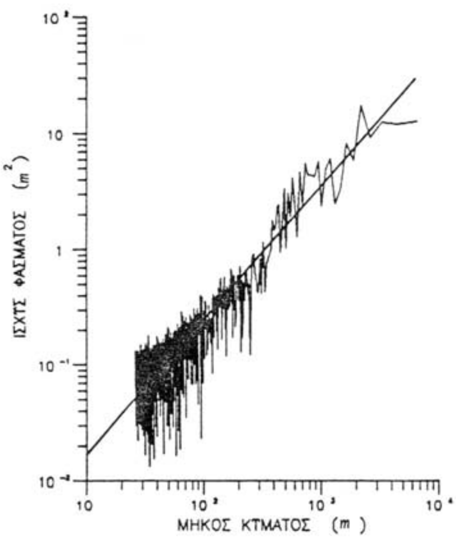
$$D = 1 - b_1$$

τουλάχιστον
πέντε
βήματα

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

$$D = 3 - \frac{b_2}{2}$$

Fast Fourier Transform - FFT



ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

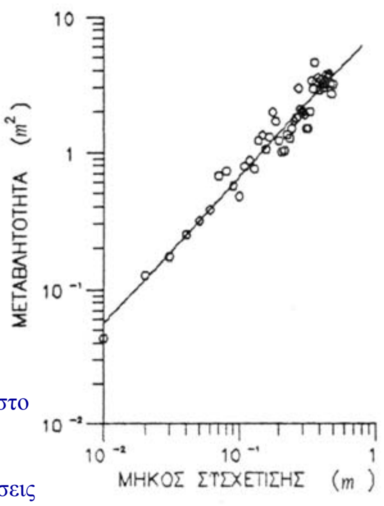
$$V(d) = \mathrm{E}\{(Z_i - Z_j)^2\}$$

$$V(d) = \frac{\sum (Z_i - Z_j)^2}{n}$$

$$D = 2 - \frac{b_{31}}{2}$$

$$D = 3 - \frac{b_{32}}{2}$$

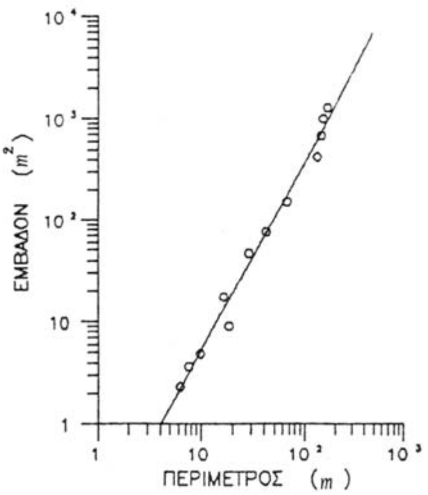
1. Καθορισμός του μέγιστου μήκους συσχέτιση στο της μεγίστης διάστασης του δείγματος
2. Οι τιμές της συνάρτησης μεταβλητότητας να υπολογίζονται στις τέσσερεις βασικές διευθύνσεις
3. Οι τιμές των μηκών συσχέτισης να ακολουθούν γεωμετρική πρόοδο



ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΕΜΒΑΔΟΥ-ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ

$$D = \frac{2}{b_4}$$

Η μέθοδος αυτή εμφανίζει τη μεγαλύτερη σταθερότητα και τα καλύτερα αποτελέσματα απ' όλες τις προηγούμενες



ΔΙΑΠΙΣΤΩΣΗ ΚΛΑΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΑΡΑΚΤΗΡΑ

1. Στατιστικά ισχυρή γραμμική σχέση μετρούμενων μεγεθών:

   H_0: «$\rho = 0$» ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ ΜΕ 99% ΕΕ

2. Τα χαρτογραφικά σύμβολα (γραμμές) να μην αποτελούν ευκλείδια σχήματα:

   H_0: «$b = 0$ ή 2» ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ ΜΕ 95% ΕΕ

3. Στατιστικά σημαντική η τιμή της προσδιοριζόμενης κλασματικής διάστασης:

   H_0: «$b = 0$» ΑΠΟΡΡΙΠΤΕΤΑΙ ΜΕ 99% ΕΕ

$$\sigma_D^{\,2} = \sigma_b^{\,2}$$

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΜΗΚΟΥΣ ΜΕ ΒΗΜΑ ΜΕΤΡΗΣΗΣ

$$\sigma_D^{\,2} = \frac{1}{4}\sigma_b^{\,2}$$

ΦΑΣΜΑΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑΣ

$$\sigma_D^{\,2} = \frac{4}{b^4}\sigma_b^{\,2}$$

ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ ΕΜΒΑΔΟΥ-ΠΕΡΙΜΕΤΡΟΥ

«ΑΡΧΕΣ ΤΗΣ ΕΠΙΛΟΓΗΣ»

$$N = c_{\mathrm{E}}\, c_{\mathrm{F}}\, N_0 \sqrt{\frac{m_0}{m}}$$

c_{E} και c_{F} παράμετροι «μεγέθυνσης» και «μορφής» του συμβολισμού

Για χαρτογραφικά σύμβολα με γραμμές ίσου πάχους:

$$c_{\mathrm{E}} = 1 \text{ και } c_{\mathrm{F}} = \sqrt{\frac{m_0}{m}}$$

$$N = N_0 \frac{m_0}{m}$$

КЛАΣΜΑΤΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ΑΠΛΟΠΟΙΗΣΗΣ ΓΡΑΜΜΩΝ

$$N = r^{-D}$$

ΒΑΣΙΚΟΣ
ΣΕ
ΠΑΡΑΓΩΓΟ

$$\frac{N}{N_0} = \left(\frac{r_0}{r}\right)^D$$

ΟΙ ΛΟΓΟΙ ΟΜΟΙΟΤΗΤΑΣ
ΑΝΑΛΟΓΟΙ
ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ ΚΛΙΜΑΚΩΝ

$$\frac{r_0}{r} = \frac{m_0}{m}$$

$$N = N_0\left(\frac{m_0}{m}\right)^D$$