ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

(ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ)

Νοέμβριος 1989

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ
ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ & ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ
(Συμπληρωματικές σημειώσεις)

ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ

Η Μερκατορική Προβολή είναι μια σύμμορφη ορθή κυλινδρική απεικόνιση. Προκύπτει απο την κυλινδρική τετραγωνική με την κατάλληλη παράλληλη μετάθεση των θέσεων των παραλλήλων ώστε να ικανοποιηθεί η συνθήκη της συμμορφίας.

Στη σφαίρα τα στοιχειώδη τμήματα του μεσημβρινού και του παράλληλου είναι:

$$dm = Rd\varphi$$

και

$$dp = R\ \cos\varphi d\lambda$$

Αφού οι θέσεις των μεσημβρινών διατηρούνται σωστές στην προβολή. έχουμε $x=R\lambda$ και άρα $dx = Rd\lambda$.

Αν θέλουμε η προβολή μας να γίνει σύμμορφη, θα πρέπει η κλίμακα στον μεσημβρινό να είναι ίση με την κλίμακα στον παράλληλο, δηλαδή: $m_m=m_p$ ή

$$\frac{dy}{dm} = \frac{dx}{dp} \quad ή$$

$$dy = \frac{Rd\lambda}{R\cos\varphi d\lambda} . Rd\varphi = Rd\varphi/\cos\varphi$$

Αρα

$$y = R\int_{0}^{\varphi} \frac{1}{\cos\varphi}\, d\varphi$$

και ολοκληρώνοντας

$$y = R \ln\left[\tan\ (\pi/4+\varphi/2)\right].$$

Η σχέση αυτή μαζί με τη

$$x = R\lambda$$

δίνουν τη μετατροπή του φ,λ σε x,y όπου το λ σε ακτίνια.

Για τον υπολογισμό των φ,λ απο τα x,y έχουμε:

$$\lambda = \frac{x}{R}$$

$$\tan\ (45^{\circ}+ \frac{\varphi}{2}) = e^{\frac{y}{R}}$$

όπου το λ σε ακτίνια

Για μικρές τιμές του φ είναι δυνατόν το cosφ να αναπτυχθεί σε σειρά οπότε και το ολοκλήρωμα βγαίνει σε σειρά, ώστε να απλουστευθούν οι υπολογισμοί αν δεν έχουμε υπολογιστή.

Το 1/cosφ αναπτύσσεται σε:

$$1/\cos\varphi = 1 + \frac{1}{2}\varphi^{2} + \frac{5}{24}\varphi^{4} + \frac{61}{720}\varphi^{6} + \ldots$$

και άρα $y = R\int_{0}^{\varphi}(1 + \frac{1}{2}\varphi^{2} + \frac{5}{24}\varphi^{4} + \ldots)\, d\varphi$ ή

$$y = R\ (\varphi + \frac{1}{6}\varphi^{3} + \frac{1}{24}\varphi^{5} + \ldots) \text{ ή}$$

$$y = M + \frac{M^{3}}{6R^{2}} + \frac{M^{5}}{24R^{4}}$$

όπου M το μήκος του μεσημβρινού απο τον ισημερινό.

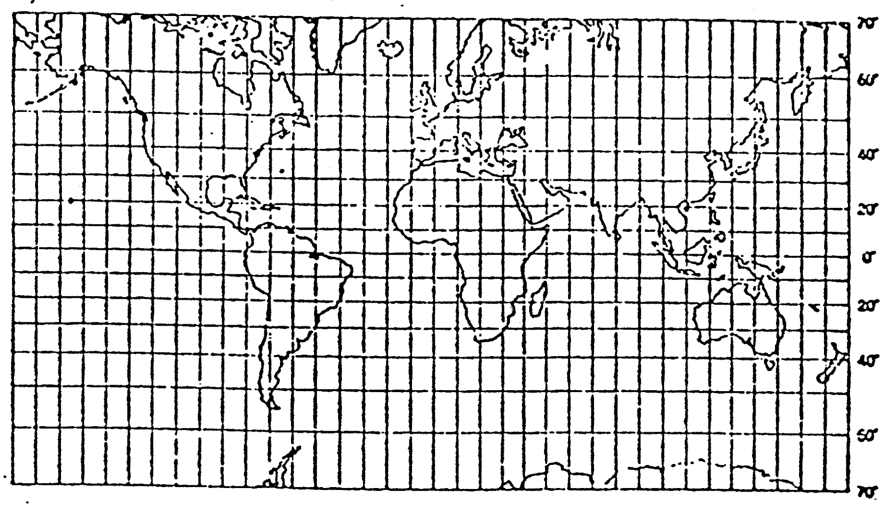
Για $\varphi=15^\circ$ η σχέση αυτή με τους τρεις πρώτους όρους δίνει μια ακρίβεια 10^{-6}. Η σειρά αυτή χρησιμοποιείται κυρίως στην εφαρμογή της μερκατορικής προβολής ως εγκάρσιας.

Η κλίμακα κατά μήκος του μεσημβρινού και του παράλληλου θα είναι ίση, και:

$$m_m = m_p = 1/\cos\varphi \quad (=a=b)$$

ενώ $$M = 1/\cos^2\varphi \quad \text{και } E=0$$

Η απεικόνιση αυτή της Μερκατορικής προβολής χρησιμοποιείται πάρα πολύ στη ναυτιλία, επειδή έχει την ιδιότητα να απεικονίζει τις λοξοδρομίες (γραμμές που έχουν σε κάθε σημείο τους σταθερό αζιμούθιο) σε ευθείες.



Μερκατορική Προβολή

Στην περίπτωση που έχουμε να απεικονίσουμε το ελλειψοειδές αντί για τη σφαίρα θα πρέπει να ορίσουμε $x=a\lambda$. Τα στοιχειώδη τμήματα του μεσημβρινού και του παράλληλου θα είναι τώρα:

$$dm = \rho d\varphi$$

$$dp = N\cos\varphi d\lambda$$

ή

$$dm = \frac{a(1-e^2)d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$dp = \frac{a\cos\varphi d\lambda}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

Για να υπάρξει συμμορφία θα πρέπει

$$dy = \frac{dm}{dp} dx$$

και αφού dx = adλ, μια που ορίσαμε x=aλ θα έχουμε:

$$dy = \frac{a(1-e^2)(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}d\varphi}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}a\cos\varphi d\lambda} a d\lambda \qquad \text{ή}$$

$$dy = \frac{a}{\cos\varphi} \cdot \frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)} d\varphi$$

Επομένως το y θα δίνεται απο το ολοκλήρωμα

$$y = a\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos\varphi} \frac{(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)} d\varphi$$

που με ολοκλήρωση δίνει:

$$y = a \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}\right]$$

Επομένως στην περίπτωση του ελλειψοειδούς η Μερκατορική προβολή δίνεται απο τις σχέσεις:

$$x = a\lambda$$

$$y = a\ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1-e\sin\varphi}{1+e\sin\varphi}\right)^{e/2}\right]$$

Στην προβολή αυτή η γραμμική κλίμακα δίνεται απο τις σχέσεις:

$$m_m = m_p = \frac{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}{\cos\varphi}$$

και η επιφανειακή κλίμακα απο:

$$M = \frac{1-e^2\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}$$

Για τον υπολογισμό των φ,λ απο τα x,y αντιστρέφοντας τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ένας επαναληπτικός αλγόριθμος της μορφής:

$$\varphi_o = 2 \arctan e^{y/a} - \pi/2$$

$$y_i = a \ln\left[\tan(\pi/4+\varphi_i/2)\left(\frac{1-e\sin\varphi_i}{1+e\sin\varphi_i}\right)^{e/2}\right]$$

$$\Delta\varphi_i = 2\left[\arc\tan\left(e^{y/a}\right)-\arc\tan\left(e^{y_i/a}\right)\right]$$

$$\varphi_{i+1} = \varphi_i + \Delta\Phi_i$$

και προφανώς: $\lambda = x/a$

Στην πράξη και για αποφυγή πολλών υπολογισμών χρησιμοποιούνται πίνακες που έχουν σαν μονάδα το ένα πρώτο λεπτό (που αντιστοιχεί σε ένα ναυτικό μίλι), ώστε τα αποτελέσματα να είναι ανεξάρτητα κλίμακας. (Εξαρτάται όμως απο την επιπλάτυνση του ελλειψοειδούς).

Στην περίπτωση αυτή ο ημιάξονας εκφράζεται σε πρώτα λεπτά, ή:

$$a = \frac{10800}{\pi} = 3437''746770....$$

Οι πίνακες αυτοί λέγονται πίνακες "αυξομερών πλατών" και έχουν μεγάλη χρήση στη ναυτιλία και την ναυτιλιακή χαρτογραφία. Με την σημερινή ανάπτυξη των υπολογιστών, οι πίνακες αυτοί έχουν χάσει την αξία τους μια που οι απαραίτητοι του υπολογισμοί γίνονται σχετικά εύκολα.

ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ

Η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή (ΕΜΠ) είναι μια απο τις περισσότερο διαδεδομένες σύμμορφες απεικονίσεις σε γεωδαιτικές και χαρτογραφικές εφαρμογές.

Προέρχεται απο την (ορθή) Μερκατορική προβολή με την εναλλαγή του ρόλου που παίζουν ο ισημερινός και ένας αυθαίρετα επιλεγμένος μεσημβρινός. Σχηματικά αντιστοιχεί σε απεικόνιση με τη βοήθεια ενός ελλειπτικής διατομής κυλίνδρου που εφάπτεται στον μεσημβρινό.

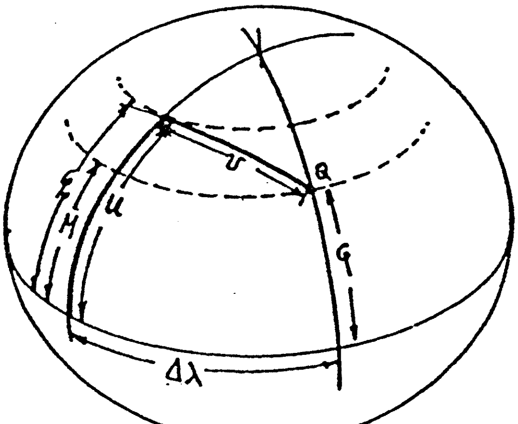
Για τον ορισμό της απεικόνισης αυτής ακολουθείται η επόμενη διαδικασία.

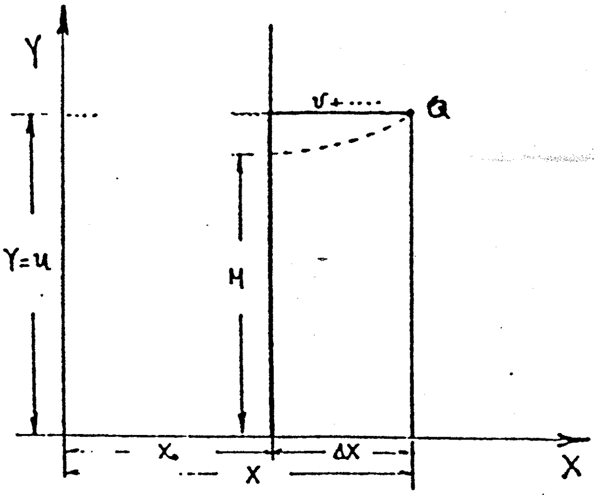
α) Επιλέγεται ένας μεσημβρινός αναφοράς σε γεωγραφικό μήκος λ_o που ονομάζεται κεντρικός μεσημβρινός. Ο μεσημβρινός αυτός απεικονίζεται ως άξονας των Υ στο επίπεδο ενώ ο ισημερινός ως άξονας των Χ. Κατά κανόνα στον κεντρικό μεσημβρινό δίνουμε μια τιμή $X=X_o$ ώστε να αποφύγουμε αρνητικές συντεταγμένες.

β) Απο το σημείο Ω (φ,λ) που θέλουμε να βρούμε τις επίπεδές του συντεταγμένες στην προβολή αυτή, φέρνουμε μια γεωδαισιακή γραμμή κάθετη στον κεντρικό μεσημβρινό.

γ) Ονομάζουμε "u" την απόσταση πάνω στο μεσημβρινό απο τον ισημερινό μέχρι τον πόδα της καθέτου και "υ" την απόσταση κατά μήκος της γεωδαισιακής γραμμής του σημείου Ω απο τον κεντρικό μεσημβρινό. Το ζεύγος των τιμών (u,υ) ορίζει αμφιμονοσήμαντα το σημείο Ω (φ,λ).

δ) Στο επίπεδο τις καρτεσιανές συντεταγμένς (Χ,Υ) το μεν Υ ταυτίζουμε με το u (δηλαδή $Y=u$) ενώ το Χ το υπολογίζουμε δίνοντας μια κατάλληλη επιμήκυνση ε στο υ, τόση ώστε η απεικόνιση να γίνει σύμμορφη (δηλαδή $X=\upsilon+\varepsilon$). Η μέθοδος που ακολουθείται για τον υπολογισμό της επιμήκυνσης είναι τελείως αντίστοιχη με αυτή της Μερκατορικής Προβολής.





Οι σχέσεις που συνδέουν τα (φ,λ) με τα (X,Y) καθώς και οι εκφράσεις για τον υπολογισμό της σύγκλισης των μεσημβρινών, της κλίμακας και της γωνίας τόξου-χορδής, είναι αναπτύγματα σε σειρά του Δλ ή του X, ανάλογα του εάν χρησιμοποιούμε γεωγραφικές ή επίπεδες συντεταγμένες. Σε περίπτωση σφαίρας οι σχέσεις είναι κλειστές και υπολογίζονται εύκολα με σφαιρική τριγωνομετρία.

Τα αναπτύγματα σε σειρά μέχρι 8ης τάξεως για τις μετατροπές των συντεταγμένων και τις αναγωγές που καλύπτουν με την απαιτούμενη ακρίβεια ζώνες μέχρι και 12°, δίνονται απο τις επόμενες σχέσεις (Paul Thomas, Conformal Projections in Geodesy and Cartography, USC & GS Sp. Pub. 251, 1968).

1. Επίπεδες συντεταγμένες απο γεωγραφικές

$$\frac{x}{N}=\frac{\Delta\lambda}{1}\cos\phi+\frac{\Delta\lambda^3\cos^3\phi}{6}(1-t^2+\eta^2)+$$

$$\frac{\Delta\lambda^5\cos^5\phi}{120}(5-18t^2+t^4+14\eta^2-58t^2\eta^2+13\eta^4+4\eta^6-64\eta^4t^2-24\eta^6t^2)+$$

$$\frac{\Delta\lambda^7\cos^7\phi}{5{,}040}(61-479t^2+179t^4-t^6)$$

$$\frac{y}{N}=\frac{M}{N}+\frac{\Delta\lambda^2}{2}\sin\phi\cos\phi+\frac{\Delta\lambda^4}{24}\sin\phi\cos^3\phi(5-t^2+9\eta^2+4\eta^4)+$$

$$\frac{\Delta\lambda^6}{720}\sin\phi\cos^5\phi\begin{pmatrix}61-58t^2+t^4+270\eta^2-330t^2\eta^2+445\eta^4+324\eta^6\\ -680\eta^4t^2+88\eta^8-600\eta^6t^2-192\eta^8t^2\end{pmatrix}+$$

$$\frac{\Delta\lambda^8}{40{,}320}\sin\phi\cos^7\phi(1{,}385-3{,}111t^2+543t^4-t^6),$$

2. Γεωγραφικές συντεταγμένες απο επίπεδες

$$\frac{\Delta\phi}{t_0}=\frac{\phi-\phi_0}{t_0}=-\frac{x^2}{2\rho_0 N_0}+\frac{x^4}{24\rho_0 N_0^3}(5+3t_0^2+\eta_0^2-4\eta_0^4-9\eta_0^2t_0^2)$$

$$-\frac{x^6}{720\rho_0 N_0^5}\begin{pmatrix}61+90t_0^2+46\eta_0^2+45t_0^4-252t_0^2\eta_0^2-3\eta_0^4+100\eta_0^6-66t_0^2\eta_0^4\\-90t_0^4\eta_0^2+88\eta_0^8+225t_0^4\eta_0^4+84t_0^2\eta_0^6-192t_0^2\eta_0^8\end{pmatrix}$$

$$+\frac{x^8}{40{,}320\rho_0 N_0^7}(1{,}385+3{,}633t_0^2+4{,}095t_0^4+1{,}574t_0^6),$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\sec\phi_0}=\frac{\lambda-\lambda_0}{\sec\phi_0}=\frac{x}{N_0}-\frac{1}{6}\left(\frac{x}{N_0}\right)^3(1+2t_0^2+\eta_0^2)+\frac{1}{120}\left(\frac{x}{N_0}\right)^5\begin{pmatrix}5+6\eta_0^2+28t_0^2-3\eta_0^4+8t_0^2\eta_0^2+\\24t_0^4-4\eta_0^6+4t_0^2\eta_0^4+24t_0^2\eta_0^6\end{pmatrix}$$

$$-\frac{1}{5{,}040}\left(\frac{x}{N_0}\right)^7(61+662t_0^2+1{,}320t_0^4+720t_0^6),$$

3. Σύγκλιση μεσημβρινών απο γεωγραφικές συντεταγμένες

$$\frac{\gamma}{\Delta\lambda\sin\phi}=1+\frac{\Delta\lambda^2\cos^2\phi}{3}(1+3\eta^2+2\eta^4)+$$

$$\frac{\Delta\lambda^4\cos^4\phi}{15}(2-t^2+15\eta^2+35\eta^4-15\eta^2t^2+33\eta^6-50\eta^4t^2+11\eta^8-60t^2\eta^6-24t^4\eta^6)+$$

$$\frac{\Delta\lambda^6\cos^6\phi}{315}(17-26t^2+2t^4).$$

4. Σύγκλιση μεσημβρινών απο επίπεδες συντεταγμένες

$$\frac{\gamma}{t_0}=\frac{x}{N_0}-\frac{1}{3}\left(\frac{x}{N_0}\right)^3(1+t_0^2-\eta_0^2-2\eta_0^4)+$$

$$\frac{1}{15}\left(\frac{x}{N_0}\right)^5(2+5t_0^2+2\eta_0^2+3t_0^4+t_1^2\eta_0^2+9\eta_0^4+20\eta_0^6-7t_0^2\eta_0^4-27t_0^2\eta_0^6+11\eta_0^8-24t_0^2\eta_0^8)-$$

$$\frac{1}{315}\left(\frac{x}{N_0}\right)^7(17+77t_0^2+105t_0^4+45t_0^6).$$

5. Κλίμακα απο γεωγραφικές συντεταγμένες

$$k=1+\frac{\Delta\lambda^2\cos^2\phi}{2}(1+\eta^2)+$$
$$\frac{\Delta\lambda^4\cos^4\phi}{24}(5-4t^2+14\eta^2+13\eta^4-28t^2\eta^2+4\eta^6-48t^2\eta^4-24t^2\eta^6)+$$
$$\frac{\Delta\lambda^6\cos^6\phi}{720}(61-148t^2+16t^4).$$

6. Κλίμακα απο επίπεδες συντεταγμένες

$$k=1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{N_0}\right)^2(1+\eta_0^2)+$$
$$\frac{1}{24}\left(\frac{x}{N_0}\right)^4(1+6\eta_0^2+9\eta_0^4+4\eta_0^6-24t_0^2\eta_0^4-24t_0^2\eta_0^6)+\frac{1}{720}\left(\frac{x}{N_0}\right)^6.$$

7. Αναγωγή τόξου-χορδής απο επίπεδες συντεταγμένες

$$\delta_1=-\frac{1}{6R_m^2}(y_2-y_1)(x_2+2x_1)+\frac{\eta_1^2t_1}{3R_m^3}(y_2-y_1)^2(x_1+x_2)$$
$$-\frac{\eta_1^2t_1}{6R_m^3}(x_2-x_1)(x_2^2+2x_2x_1+3x_1^2)+\ldots,$$
$$\delta_2'=-\frac{1}{6R_m^2}(y_1-y_2)(x_1+2x_2)-\frac{\eta_1^2t_1}{3R_m^3}(y_1-y_2)^2(x_1+3x_2)$$
$$-\frac{\eta_1^2t_1}{6R_m^3}(x_1-x_2)(x_1^2+2x_1x_2+3x_2^2)+\ldots,$$

Στις σχέσεις αυτές:

t = $\tan\varphi$

n^2 = $(e')^2\cos^2\varphi$

M = μήκος μεσημβρινού απο τον Ισημερινό μέχρι το πλάτος φ

φ = το πλάτος που αντιστοιχεί σε μήκος μεσημβρινού M

Σημείωση : Στις προηγούμενες σχέσεις δεν έχει γίνει αναγωγή κλίμακας.

ΑΠΛΟΠΟΙΗΜΕΝΕΣ ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΕΝΙΑΙΑ ΚΑΛΥΨΗ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΟΣ

Για την κάλυψη της Ελλάδος σε μια ενιαία ζώνη (με $\lambda_o = 24^o$) που σημαίνει $\lambda-\lambda_o$ μέχρι $\pm 4^o 30'$ ή $X-X_o$ μέχρι ± 400 km και πλάτη απο 35^o μέχρι 42^o, οι προηγούμενες σχέσεις μπορούν να απλοποιηθούν αν αφαιρεθούν ορισμένοι όροι.

Λαμβάνοντας υπόψη ότι:

$\Delta\lambda < 0.0785$ rad, $\Delta\lambda\cos\varphi < 0.0643$ rad

$\Delta X < 400$ km

$N \simeq \rho \simeq a \simeq 6.35$ Mm

$0.7 < t < 0.9$

$0.5 < t^2 < 0.8$

$0.0037 < n^2 < 0.0045$

$0.0022 < t^2 n^2 < 0.0030$

και επιδιώκοντας στα αποτελέσματα μία ακρίβεια ενός χιλιοστού του μέτρου (1mm) και 10^{-8} στη κλίμακα, τα αναπτύγματα σε σειρά απλουστεύονται στις επόμενες σχέσεις.

Στις σχέσεις αυτές που ικανοποιούν πλήρως τις απαιτήσεις του νέου ελληνικού γεωδαιτικού συστήματος αναφοράς ΕΓΣΑ 87, έχουμε :

$\Delta X = X-X_o \qquad \Delta\lambda = \lambda-\lambda_o$

N, ρ, οι ακτίνες καμπυλότητας στην κύρια κάθετο και στο μεσημβρινό, αντίστοιχα, στο πλάτος φ

$$n^2 = \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi = e'^2\cos^2\varphi$$

$t = \tan\varphi$

$M = Y_o = \mu_o\varphi + \mu_2\sin2\varphi + \mu_4\sin4\varphi + \mu_6\sin6\varphi + \ldots$ το μήκος του μεσημβρινού απο τον ισημερινό μέχρι το πλάτος φ

$L = \Delta\lambda \cos\varphi$

K_o η κλίμακα αναγωγής

φ_o το πλάτος που έχει μήκος μεσημβρινού $= \dfrac{Y}{K_o}$

N_o, ρ_o, t_o, n_o οι τιμές των N, ρ, t, n, που αντιστοιχούν στο πλάτος φ_o

Οι απλουστευμένες εκφράσεις είναι οι ακόλουθες.

1. Υπολογισμός επίπεδων συντεταγμένων απο γεωγραφικές συντεταγμένες

$$X = X_o + \left[N\ \cos\varphi\right]\Delta\lambda + \left[\frac{N\ \cos^3\varphi}{6}\ (1-t^2+n^2)\right]\ \Delta\lambda^3$$

$$+ \left[\frac{N\ \cos^5\varphi}{120}\ (5-18t^2+t^4+14n^2-58t^2n^2)\right]\ \Delta\lambda^5$$

$$Y = Y_o + \left[\frac{N\ \tan\varphi\ \cos^2\varphi}{2}\right]\ \Delta\lambda^2 + \left[\frac{N\ \tan\varphi\ \cos^4\varphi}{24}\ (5-t^2+9n^2+4n^4)\right]\ \Delta\lambda^4$$

$$+ \left[\frac{N\ \tan\varphi\ \cos^6\varphi}{720}\right]\ (61 - 58t^2)\ \ \Delta\lambda^6$$

Δεδομένου ότι τα μήκη πολλαπλασιάζονται με την κλίμακα K_o για να αναχθούν σε κλίμακα έχουμε:

$$X = X_o + \left[K_oN\right] L + \left[K_o\ \frac{N}{6}\ (1-t^2+n^2)\right] L^3$$

$$+ \left[K_o\ \frac{N}{120}(5-18t^2+t^4+14n^2-58t^2n^2)\right] L^5$$

$$Y = K_oM + \left[K_o\ \frac{N\ \tan\varphi}{2}\right] L^2 + \left[K_o\ \frac{N\ \tan\varphi}{24}\ (5-t^2+9n^2+4n^4)\right] L^4$$

$$+ \left[K_o\ \frac{N\ \tan\varphi}{720}\ (61 - 58t^2)\right]\ L^6$$

2. Υπολογισμός γεωγραφικών συντεταγμένων απο επίπεδες συντεταγμένες

$$\varphi = \varphi_o - \left[\frac{\tan\varphi_o}{2\rho_oN_o}\right]\ \Delta X^2 + \left[\frac{\tan\varphi_o}{24\rho_oN_o^3}\ (5+3t_o^2+n_o^2-4n_o^4-9t_o^2n_o^2)\right]\ \Delta X^4$$

$$- \left[\frac{\tan\varphi_o}{720\rho_oN_o^5}\ (61+90t_o^2+45t_o^4)\right]\ \Delta X^6$$

$$\lambda = \lambda_o + \left[\frac{1}{N_o \cos\varphi_o}\right]\Delta X - \left[\frac{1}{6N_o^3 \cos\varphi_o}(1+2t_o^2+n_o^2)\ \Delta X^3\right] +$$

$$+ \left[\frac{1}{120N_o^5 \cos\varphi_o}(5+6n_o^2-28t_o^2-8t_o^2n_o^2+24t_o^4)\right]\Delta X^5$$

Επειδή υπάρχει και η κλίμακα K_o και αν αντικαταστήσουμε το $\frac{N}{\rho} = 1+n^2$ ώστε να χρησιμοποιήσουμε μόνο μία ακτίνα καμπυλότητας έχουμε:

$$\varphi = \varphi_o - \left[\frac{\tan\varphi_o}{2K_o^2N_o^2}(1+n_o^2)\right]\Delta X^2 +$$

$$+ \left[\frac{\tan\varphi_o}{24K_o^4N_o^4}(5+3t_o^2+6n_o^2-3n_o^4 - 6t_o^2n_o^2-9t_o^2n_o^4)\right]\Delta X^4$$

$$- \left[\frac{\tan\varphi_o}{720K_o^6N_o^6}(61+90t_o^2+45t_o^4)\right]\Delta X^6$$

$$\lambda = \lambda_o + \left[\frac{1}{K_oN_o \cos\varphi_o}\right]\Delta X - \left[\frac{1}{6K_o^3N_o^3 \cos\varphi_o}(1+2t_o^2+n_o^2)\right]\Delta X^3 +$$

$$+ \left[\frac{1}{120K_o^5N_o^5 \cos\varphi_o}(5+6n_o^2-28t_o^2-8t_o^2n_o^2+24t_o^4)\right]\Delta X^5$$

3. Υπολογισμός σύγκλισης των μεσημβρινών απο γεωγραφικές συντεταγμένες

$$\gamma = \left[\sin\varphi\right]\Delta\lambda + \left[\frac{\sin\varphi\ \cos^2\varphi}{3}(1+3n^2+2n^4)\right]\Delta\lambda^3 +$$

$$+ \left[\frac{\sin\varphi\ \cos^4\varphi}{15}(2-t^2)\right]\Delta\lambda^5$$

ή

$$\gamma = \left[\tan\varphi\right] L + \left[\frac{\tan\varphi}{3}(1+3n^2+4n^4)\right] L^3 + \left[\frac{\tan\varphi}{15}(2-t^2)\right] L^5$$

Να σημειωθεί ότι ο τελευταίος όρος είναι μικρότερος απο 0"02.

4. Υπολογισμός σύγκλισης των μεσημβρινών απο επίπεδες συντεταγμένες

$$\gamma = \left[\frac{\tan\varphi_o}{K_oN_o}\right]\Delta X - \left[\frac{\tan\varphi_o}{3K_o^3N_o^3}\,(1 + t_o^2 - n_o^2 - 2n_o^4)\right]\Delta X^3 +$$

$$+ \left[\frac{\tan\varphi_o}{15K_o^5N_o^5}\,(2+5t_o^2-3t_o^4)\right]\Delta X^5$$

Ο τελευταίος όρος είναι μικρότερος απο 0"1.

5. Υπολογισμός κλίμακας απο γεωγραφικές συντεταγμένες

$$K = 1 + \left[\frac{\cos^2\varphi}{2}\,(1+n^2)\right]\Delta\lambda^2 + \left[\frac{\cos^4\varphi}{24}\,(5-4t^2)\right]\Delta\lambda^4$$

και επειδή πρέπει να γίνει η αναγωγή κλίμακας πολλαπλασιάζοντας επι K_o έχουμε:

$$K = K_o + \left[\frac{K_o}{2}\,(1+n^2)\right]L^2 + \left[\frac{K_o}{24}\,(5-4t^2)\right]L^4$$

6. Υπολογισμός κλίμακας απο επίπεδες συντεταγμένες

$$K = 1 + \left[\frac{1}{2N_o^2}\,(1+n_o^2)\right]\Delta X^2 + \left[\frac{1}{24N_o^2}\,(1+6n_o^2)\right]\Delta X^4$$

και με την αναγωγή κλίμακας πολλαπλασιάζονται επί K_o (αλλά τα ΔX είναι ήδη πολλαπλασιασμένα επί K_o).

$$K = K_o + \left[\frac{1}{2K_oN_o^2}\,(1+n_o^2)\right]\Delta X^2 + \left[\frac{1}{24K_o^3N_o^4}\,(1+6n_o^2)\right]\Delta X^4$$

Ο τελευταίος όρος είναι μικρότερος απο 1 ppm.

7. Υπολογισμός αναγωγής τόξου-χορδής 1.2

$$\delta_{12} = -\frac{1}{6R^2}\,(Y_2-Y_1)\,(2\Delta X_1+\Delta X_2)\left[1 - \frac{(2\Delta X_1+\Delta X_2)^2}{27R^2}\right]$$

όπου $R = \sqrt{N\rho}$ η μέση καμπυλότητα στο μέσο της 1,2.

Το R^2 μπορεί να αντικατασταθεί με $R^2 = N^2 / (1 + n^2)$.

Ο τελευταίος όρος αλλάζει λιγότερο απο 0,5°/₀₀ το αποτέλεσμα του πρώτου όρου.

8. Υπολογισμός κλίμακας πεπερασμένου μήκους 1,2

Υπολογίζεται απο την ολοκλήρωση της κλίμακας κατά μήκος της γραμμής 1,2.

$$K_{12} = K_o\left[1 + \left(\frac{\Delta X_1^2+\Delta X_1\Delta X_2+\Delta X_2^2}{6K_o^2R^2}\right)\left(1 + \frac{\Delta X_1^2+\Delta X_1\Delta X_2+\Delta X_2^2}{36K_o^2R^2}\right)\right]$$

και εδω το R^2 μπορεί να αντικατασταθεί με $R^2 = N^2 / (1 + n^2)$.

Ο τελευταίος όρος αλλάζει κατά λιγότερο απο 0.6ppm το αποτέλεσμα στη χειρότερη περίπτωση.

Η σχέση αυτή για πεπερασμένο μήκος καταλήγει στην κλίμακα σε ένα σημείο όταν το μήκος της γραμμής 1, 2 τείνει στο μηδέν, δηλαδή όταν το 2 τείνει στο 1.

<u>ΣΧΕΣΕΙΣ ΓΙΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ</u>

Για διευκόλυνση των πράξεων σε υπολογιστή οι προηγούμενες σχέσεις γράφονται στις επόμενα βολικώτερες μορφές όπου:

$$P = \frac{X-X_o}{K_o N_o} = \frac{\Delta X}{K_o N_o}$$

$$L = (\lambda-\lambda_o)\cos\varphi = \Delta\lambda \cos\varphi$$

1.

$$X = \left[\left\{\left[\left(\frac{5-18t^2+t^4+14n^2-58t^2n^2}{120}\right)L^2+\left(\frac{1-t^2+n^2}{6}\right)\right]L^2+1\right\}LNK_o\right]+X_o$$

$$Y = \left[\left\{\left[\left(\frac{61-58t^2}{720}\right)L^2+\left(\frac{5-t^2+9n^2+4n^4}{24}\right)\right]L^2+\frac{1}{2}\right\}L^2 N \tan\varphi_o + M\right]K_o$$

2.

$$\varphi = \left[\left\{\left[-\left(\frac{61+90t_o^2+45t_o^4}{720}\right)P^2+\left(\frac{5+3t_o^2+6n_o^2-3n_o^4-6t_o^2n_o^2-9t_o^2n_o^4}{24}\right)\right]P^2 - \frac{1+n_o^2}{2}\right\}P^2\right]\tan\varphi_o + \varphi_o$$

$$\lambda = \left[\left\{\left[\left(\frac{5+6n_o^2-28t_o^2-8t_o^2n_o^2+24t_o^4}{120}\right)P^2-\left(\frac{1+2t_o^2+n_o^2}{6}\right)\right]P^2 + 1\right\}P\right]\frac{1}{\cos\varphi_o} + \lambda_o$$

3. $$\gamma = \left\{\left[\left(\frac{2-t^2}{15}\right)L^2+\left(\frac{1+3n^2+4n^4}{3}\right)\right]L^2+1\right\}L\tan\varphi$$

4. $$\gamma = \left\{\left[\left(\frac{2+5t_o^2-3t_o^4}{15}\right)P^2+\left(\frac{1+t_o^2-n_o^2-2n_o^4}{3}\right)\right]P^2+1\right\}P\tan\varphi_o$$

5. $$K = \left\{\left[\left(\frac{5-4t^2}{24}\right)L^2+\left(\frac{1+n^2}{2}\right)\right]L^2+1\right\}K_o$$

6. $$K = \left\{\left[\left(\frac{1+6n^2}{24}\right)P^2+\left(\frac{1+n_o^2}{2}\right)\right]P^2+1\right\}K_o$$

$$7.\ \delta_{12} = -\left[1-\left(\frac{\Delta X_{1/3}}{3R}\right)^2\right]\Delta X_{1/3}\ (Y_2-Y_1)\ \frac{1}{2R^2}$$

όπου $\Delta X_{1/3} = \dfrac{2\Delta X_1+\Delta X_2}{3}$ = η τιμή ΔΧ στο 1/3 της απόστασης 1,2

$$8.\ K_{12} = \left\{\left[\left(\frac{1+6n_o^2}{24}\right)Q^2+\left(\frac{1+n_o^2}{2}\right)\right]Q^2+1\right\}K_o$$

όπου $Q^2 = \dfrac{\Delta X_1^2+\Delta X_1\Delta X_2+\Delta X_2^2}{3K_o^2N_o^2} = \dfrac{P_1^2+P_1P_2+P_2^2}{3}$

Πρέπει τέλος να σημειωθεί ότι για μήκη πλευρών μέχρι 30 km, μια ακρίβεια 0"1 για τις αναγωγές τόξου - χορδής και 1 ppm για τις κλίμακες μπορεί να επιτευχθεί αν χρησιμοποιηθούν οι επόμενες σχέσεις που ικανοποιούν τις ανάγκες του ΕΓΣΑ 87.

$$\delta_{12} = -\,2''539\ (Y_2-Y)\ (X_{1/3}-0.5)$$

$$= -\,7''836\ (Y_2-Y)\ (X_{1/3}-0.5)$$

$$\kappa = 12311\ (X - 0.5)^2 - 400 \quad \text{σε ppm}$$

$$\kappa_{12} = 12311\ (X_{1/2}-0.5)^2 - 400 \quad \text{σε ppm}$$

όπου $X_{1/3}$ = η τιμή του Χ στο 1/3 της απόστασης 1,2

$X_{1/2}$ = η τιμή του Χ στο μέσο της απόστασης 1,2

ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΤΟΜΕΑΣ ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ
(ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ)

* ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ
ΤΟ ΕΛΛΗΝΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ "ΕΓΣΑ' 87"

* Στοιχεία απο έκδοση του Ο.Κ.Χ.Ε.

Νοέμβριος 1989

1. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Ένα Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (ΓΣΑ) στην κλασσική γεωδαισία:

<u>ορίζεται</u> με την επιλογή ενός (γεωδαιτικού) Datum, που δίνει αρχικές συντεταγμένες σε ένα σημείο και τις διαστάσεις ενός ελλειψοειδούς αναφοράς. Ο προσανατολισμός επιτυγχάνεται με αστρονομικές μεθόδους.

<u>υλοποιείται</u> με τις μετρήσεις ενός γεωδαιτικού δικτύου, τη συνόρθωσή του και τον υπολογισμό των συντεταγμένων (φ,λ) των κορυφών του στο νέο datum.

<u>εφαρμόζεται</u> με την απεικόνιση (ή προβολή) του ελλειψοειδούς σε ένα επίπεδο που δίνει τις επίπεδες συντεταγμένες (Χ,Υ) του δικτύου.

<u>χρησιμοποιείται</u> με την εξάρτηση (και εντοπισμό) των γεωδαιτικών, τοπογραφικών και χαρτογραφικών εργασιών στο δίκτυο και τη χρήση των συντεταγμένων των κορυφών του.

Επομένως: <u>Το datum, το δίκτυο και το προβολικό σύστημα αποτελούν μέρη του ΕΓΣ</u>.

Ένα ΓΣΑ μπορεί να οριστεί, υλοποιηθεί και χρησιμοποιηθεί και διαφορετικά χρησιμοποιώντας μεθόδους της δορυφορικής (κυρίως) γεωδαισίας. Αυτό όμως προϋποθέτει ότι και ο εντοπισμός γίνεται με δορυφορικές μεθόδους.

Σήμερα χρησιμοποιούνται συχνά υβριδικά (μικτά) συστήματα, με συνδιασμό επίγειων και δορυφορικών μεθόδων, με τάση των περισσότερο χρήση δορυφορικών μεθόδων.

2. ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

Στην Ελλάδα χρησιμοποιούνται διάφορα γεωδαιτικά συστήματα με συνδιασμούς μερικές φορές datums, δικτύων και προβολικών συστημάτων. (Πίνακας Ι) Τα συστήματα αυτά στηρίζονται στο γεωδαιτκό (τριγωνομετρικό) δίκτυο Ιης (και ΙΙας, ΙΙΙης, ΙVης) τάξεως της Γ.Υ.Σ. (Σχ.1)

Το περισσότερο διαδεδομένο σύστημα είναι το (παλαιό) Ελληνικό Datum σε προβολή Hatt. Το σύστημα αυτό χρησιμοποιεί και παλαιές μετρήσεις και συνορθώσεις και επομένως έχει αδυναμίες. Το νεώτερο σύστημα γνωστό και ως Νέο Bessel της Γ.Υ.Σ. δεν έχει ακόμα ολοκληρωθεί και προς το παρόν είναι για εσωτερική κυρίως χρήση.

Το ED 50 χρησιμοποιείται για στρατιωτικούς σκοπούς και στους ναυτικούς χάρτες. Εδώ πρέπει να σημειωθεί ότι επειδή το Ελληνικό τμήμα του ED 50 δεν συνδέεται πιά με το υπόλοιπο, παρά με μία όδευση μόνο, οι αναθεωρήσεις του (γνωστές ως ED 77, ED 79) ήδη δεν μπορούν να εφαρμοστούν στην Ελλάδα.

Τέλος τα δορυφορικά συστήματα χρησιμοποιούνται ελάχιστα και μόνο σε επιστημονικές εργασίες (γεωδυναμικής) και ελάχιστα σε ναυτιλιακά συστήματα εντοπισμού.

3. ΠΩΣ ΕΠΙΛΕΓΕΤΑΙ ΕΝΑ ΓΣΑ

Η επιλογή του datum (διαστάσεις και θέση του ελλειψοειδούς) πρέπει να γίνεται έτσι ώστε να προσαρμόζεται όσο το δυνατόν καλύτερα στο γεωειδές της περιοχής. Αυτό εξασφαλίζει μικρές αποκλίσεις της κατακορύφου και υψόμετρα του γεωειδούς για την καλύτερη αναγωγή των μετρήσεων που αναφέρονται στην κατακόρυφο.

Κατά κανόνα για ελλειψοειδές αναφοράς προτιμάται το GRS 80 που θεωρείται σήμερα διεθνές πρότυπο.

Το γεωδαιτικό δίκτυο (κυρίως της Ιης) πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να έχει το "δυνατότερο" σχήμα. Να μετρηθεί με την καλύτερη δυνατή ακρίβεια και οι αναγωγές, υπολογισμοί και συνόρθωση να γίνουν με την απαραίτητη προσοχή και πληρότητα.

Σήμερα το θέμα της θέσης του ελλειψοειδούς και οι μετρήσεις των δικτύων αντιμετωπίζονται συχνά με μεθόδους της δορυφορικής γεωδαισίας, με τα λεγόμενα δίκτυα μηδενικής τάξεως.

Το σύστημα απεικόνισης (προβολή) πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί τις παραμορφώσεις στην περιοχή. Αυτό εξαρτάται από τη θέση, την έκταση και το σχήμα της περιοχής. Η απλότητα των τύπων για τις αναγωγές παίζουν επίσης σημασία στην επιλογή. Οι σύμμορφες απεικονίσεις έχουν σημαντικά πλεονεκτήματα και η επικρατούσα διεθνώς προβολή είναι σήμερα η Εγκάρσια Μερκατορική σε διάφορες παραλλαγές.

4. ΠΩΣ ΕΓΙΝΕ Η ΕΠΙΛΟΓΗ

Για το datum επελέγη καταρχήν το ελλειψοειδές GRS 80 για ελλειψοειδές αναφοράς και τοποθετήθηκε με παράλληλη μετάθεση ως προς το BTS έτσι ώστε να προσαρμοστεί κατά τον καλύτερο τρόπο ($\Sigma\xi=\Sigma\eta=\Sigma N=0$) στο γεωειδές που καλύπτει την ηπειρωτική Ελλάδα. Ως (ομαλοποιημένο) γεωειδές χρησιμοποιήθηκε ένα (Σχ.2) πού προέκυψε από συνδιασμό δυναμικού δορυφορικού γεωειδούς, της μέσης στάθμης της θάλασσας από τον ωκεανογραφικό δορυφόρο SEASAT, της τοπογραφίας της μέσης στάθμης της θάλασσας από ωκεανογραφικά δεδομένα και των γεωκεντρικών συντεταγμένων στο σύστημα BTS για το Κεντρικό Βάθρο (CP) του Κέντρου του Διονύσου.

Οι συντεταγμένες αυτές προκύψαν από παρατηρήσεις δορυφόρων πολλών ετών με συστήματα φωτογραφικά, doppler και laser.

Η αναγκαία για την προσαρμογή μετάθεση ΔΧ, ΔΥ, ΔΖ, δίνει τις συντεταγμένες του κέντρου του ελλειψοειδούς ως προς το σύστημα BTS και επομένως τις καρτεσιανές συντεταγμένες του CP στο νέο σύστημα. Οι συντεταγμένες αυτές μετατρεπόμενες σε ελλειψοειδείς δίνουν ουσιαστικά τις συμβατικές συντεταγμένες της αφετηρίας. Οι τιμές αυτές είναι:

$$\varphi = 38^\circ \quad 04' \quad 33.''\overset{8107}{\cancel{8000}}$$
$$\lambda = 23^\circ \quad 55' \quad 51.''\overset{0095}{\cancel{0000}}$$
$$N = \quad 7.000 \text{ m}$$

Στο νέο αυτό datum το γεωειδές (ομαλοποιημένο) δίνεται στο (Σχ. 3) όπως αναμένεται από το μετασχηματισμό.

Για το δίκτυο χρησιμοποιήθηκε το δίκτυο Ιης τάξεως της Γ.Υ.Σ. στο οποίο προστέθηκαν 19 σταθμοί doppler, από τους οποίους οι 17 ταυτίζονται με το δίκτυο Ιης, 6 σταθμοί laser που συνδέθηκαν με το δίκτυο Ιης (ή ΙΙας) με το δορυφορικό σύστημα GPS και 12 σταθμοί GPS σε 12 σημεία του δικτύου Ιης τάξης (Σχ.5).

Στο Διόνυσο υπάρχουν παρατηρήσεις και doppler και laser και GPS. Οι σταθμοί doppler δίνουν ακρίβεια ±20 cm, οι σταθμοί laser ± 2cm και οι σταθμοί GPS ±5cm Επομένως η κλίμακα και ο προσανατολισμός δίνονται στο δίκτυο κυρίως απο το σύστημα laser που εξασφαλίζει μια ακρίβεια τουλάχιστον 10^{-7} ή 0.1ppm. Το δίκτυο Ιης παίρνει επομένως κλίμακα και προσανατολισμό απο το σύστημα laser και doppler.

Η ένταξη των δορυφορικών δικτύων (doppler+laser +GPS) έχει επιπλέον το προσόν να "παγώσει" το δίκτυο σε μια ορισμένη εποχή, αφού στα 20 χρόνια που διήρκεσαν οι μετρήσεις του επίγειου τριγωνισμού αναμένουμε τεκτονικές μετακινήσεις που φτάνουν το ένα μέτρο στην έκταση της Ελλάδας.

Το τελικό δίκτυο προκύπτει απο τη συγχώνευση των δικτύων laser ,doppler και GPS με το δίκτυο της Ιης (Σχ.5). Σε αυτό το δίκτυο θα γίνει η πύκνωση ΙΙας, ΙΙΙης και ΙVης.

Για προβολικό σύστημα επελέγει η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή σε μία ζώνη. Τα πλεονεκτήματα ενός ενιαίου συστήματος, ιδιαίτερα με τις εξελίξεις στον τομέα της ψηφιοποίησης και ηλεκτρονικής αρχειοθέτησης των κτηματολογικών και χαρτογραφικών πληροφοριών, είναι πολύ σημαντικότερα από τα μειονεκτήματα της ανάγκης των απαραίτητων αναγωγών. Άλλωστε με τις ακρίβειές των σημερινών οργάνων (της τάξης του 10^{-5}) οι αναγωγές της κλίμακας λόγω προβολής θα ήταν απαραίτητες εκτός αν ορίζαμε ζώνες εύρους 30΄ που θα ήταν ιδιαίτερα πολύπλοκο. Για την επιλογή του κεντρικού μεσημβρινού λ_0 και τις κλίμακας σ΄ αυτόν K_0 έγινε μία βελτιστοποίηση ώστε να ελαχιστοποιούνται οι παραμορφώσεις κλίμακας στην έκταση της ηπειρωτικής χώρας. Το αποτέλεσμα ήταν $\lambda_0=23^\circ 30'$ και $K_0=0.999550$ αλλά δεδομένου της μικράς ευπάθειας στη βελτιστοποίηση για μικρές μεταβολές προτιμήθηκαν οι τιμές:

$$\lambda_0 = 24^\circ \quad K_0 = 0.999600$$

Επειδή έχουμε ακέραιο μεσημβρινό στο γεωμετρικό μέσο της χώρας και επειδή η τιμή $K_0 = 0.999600$ είναι εκείνη που χρησιμοποιείται στην με μεγάλη διάδοση προβολή της UTM.

5. ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ 87

Το ΕΓΣΑ 87 ορίζεται με το ελλειψοειδές του GRS 80 ($a=6\ 378\ 137$, $f=1/298.2572236$) προσανατολισμένο παράλληλα με το διεθνές σύστημα του BTS, και με τις συντεταγμένες στο βάθρο του Διονύσου

$$\varphi = 38^\circ\ 04'\ 33.''\cancel{8000}\ 8107$$
$$\lambda = 23^\circ\ 55'\ 51.''\cancel{0000}\ 0095$$
$$N = 7.000\ m$$

Τούτο αντιστοιχεί σε μία εκκεντρότητα ως προς το BTS

$$\Delta X = -199.87,\quad \Delta Y = +74.79,\quad \Delta Z = +246.62 \quad *$$

Οι τιμές αυτές αν προστεθούν στις καρτεσιανές συντεταγμένες του ΕΓΣΑ 87 μας δίνουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες στο σύστημα του ΒΤΣ. Τα δύο αυτά συστήματα είναι παράλληλα και έχουν την ίδια κλίμακα με μία αβεβαιότητα $\pm 5.10^{8}$.

Το ΕΓΣΑ 87 υλοποιείται με το δίκτυο που έχει προέλθει από τη συγχώνευση των δικτύων laser, doppler και Ιης (Σχ. 4) και που θα πυκνωθεί με δίκτυα κατωτέρας τάξεως. Για την αναγωγή των πλευρών στο ελλειψοειδές εκτός από το υψόμετρο της πλευράς πρέπει να προστεθεί και η αναγωγή λόγω γεωειδούς (Σχ.5).

Το ΕΓΣΑ 87 χρησιμοποιεί την Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή με:

$$\lambda_\circ = 24^\circ$$
$$K = 0.999600$$

για προβολικό σύστημα, αναφερόμενη φυσικά στο GRS 80.

---

* Οι τιμές αυτές αντιστοιχούν σε μία από τις τελευταίες λύσεις (Νοε. 1987) του BTS. Οι τιμές αυτές θα μεταβάλλονται από έτος σε έτος κατά μερικά εκατοστά.

Το (Σχ. 6) δίνει το χάρτη της Ελλάδας στην προβολή αυτή, το (Σχ. 7) την παραμόρφωση κλίμακας και το (Σχ. 8) την κατανομή της κλίμακας στην έκταση της χώρας που φαίνεται ότι στο 99% της χώρας ή παραμόρφωση είναι λιγότερη από 670 ppm.

Το νέο αυτό ΓΣΑ ονομάζεται

" Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς 1987 "

ή "ΕΓΣΑ΄87" και για διεθνή χρήση "GR΄87"

6. ΠΩΣ ΥΛΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ΄ 87

(ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΕΦΑΡΜΟΓΗΣ)

Για να υλοποιηθεί πλήρως το ΕΓΣΑ΄87 θα πρέπει να προσδιοριστούν και να δοθούν σε πίνακες οι συντεταγμένες όλων των σημείων Ιης, ΙΙας, ΙΙΙης και ΙVης στο νέο datum και νέα συνόρθωση. Επίσης να δοθούν και οι επίπεδες συντεταγμένες στην καινούργια Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή. (Πίνακας ΙΙ)

Σήμερα (Δεκ. 1989) το δίκτυο Ιης που έχει επανασυνορθωθεί στο νέο datum από τη Γ.Υ.Σ, έχει ενταχθεί στο ΕΓΣΑ΄87. Η ένταξη αυτή έδειξε μία συμβατότητα της τάξης των 1-3 ppm που αν του δοθεί στροφή και κλίμακα κατεβαίνει κάτω από το 1 ppm. (δηλαδή 3 cm στα 30 Km)

Το επόμενο βήμα είναι να ενταχθούν διαδοχικά στο νέο δίκτυο Ιης τα δίκτυα ΙΙας, ΙΙΙης και ΙVης χρησιμοποιώντας το αρχείο των αρχικών παρατηρήσεων που έχει η Γ.Υ.Σ.

Είναι δυνατόν για αποφυγή νέων μεγάλων συνορθώσεων (όλα τα τριγωνομετρικά σημεία της χώρας είναι περίπου 25.000) να χρησιμοποιηθούν υπάρχοντα συνορθωμένα μέρη του δικτύου (π.χ. από το λεγόμενο Νέο Bessel) και να ενταχθούν στο ΕΓΣΑ΄87, με προσαρμογή τύπου Helmert, χρησιμοποιώντας ένα μικρότερο αριθμό σημείων για σημεία εξάρτησης. Η ακρίβεια μιάς τέτοιας διαδικασίας εξαρτάται κατά πόσο υπάρχουν σημαντικές παραμορφώσεις στα παλαιά δίκτυα. Το δίκτυο ΙVης μπορεί να ενταχθεί με τη μέθοδο αυτή.

Η ολοκλήρωση αυτής της εργασίας αναμένεται στις αρχές του 1990.

7. ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΣΤΗΝ ΠΡΑΞΗ ΤΟ ΕΓΣΑ΄ 87

Από τη στιγμή που έχουν δοθεί οι συντεταγμένες των τριγωνομετρικών σημείων στο ΕΓΣΑ΄87, οι συνήθεις γεωδαιτικές και τοπογραφικές εργασίες δεν διαφέρουν σε τίποτα από εκείνες που γίνονται σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα.

Βέβαια με τη χρήση της Ε.Μ.Π. επιβάλλεται να γίνονται αναγωγές που στην προβολή Hatt 30΄Χ 30΄ δεν γίνονται επειδή είναι αμελητέες (max περίπου 5 ppm). Οι αναγωγές αυτές γίνονται στα μετρώμενα μήκη λόγω κλίμακας, που είναι διαφορετική από σημείο σε σημείο, αλλά η ίδια σε κάθε διεύθυνση από το σημείο, και στις μετρούμενες γωνίες, δεδομένου ότι η σκόπευσή μας, που είναι ευθεία στο χώρο, προβάλλεται σε καμπύλη, ενώ στην προβολή θέλουμε να χρησιμοποιούμε ευθείες (δηλ. τη χορδή). Αυτή η αναγωγή είναι γνωστή σαν "αναγωγή εφαπτομένης σε χορδή". Φυσικά για να κάνουμε την αναγωγή μιάς γωνίας πρέπει να βρούμε την διαφορά των αναγωγών εφαπτομένης σε χορδή που αντιστοιχεί στην κάθε πλευρά της γωνίας.

Όμως για συνήθεις εργασίες με πλευρές μέχρι 20 - 25 Km. και για όλη την έκταση της χώρας οι τύποι που δίνουν την κλίμακα Κ ή την κλίμακα παραμόρφωσης κ=Κ-1 και την αναγωγή εφαπτομένης σε χορδή δ είναι ιδιαίτερα απλοί. Έχουμε:

$$\kappa = 12311\ (X-0.5)^2-400 \qquad (\text{σε ppm})$$

όπου το Χ εκφρασμένο σε Mm (Μεγάμετρα ή εκατομμύρια μέτρα. Το (Σχ. 9) δίνει την τιμή του κ στην έκταση της χώρας.

Σε περίπτωση που έχουμε πεπερασμένο μήκος στο έδαφος και θέλουμε να πάρουμε το μήκος στην προβολή (ή το αντίστροφο) υπολογίζουμε το κ με τιμή του Χ στο μέσο του μήκους δηλαδή $X=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$.

Για την αναγωγή εφαπτομένης σε χορδή έχουμε:

$$\begin{aligned}\delta &= -7''836\ (Y_2-Y_1)\ (X_{1/3}-0.5)\\ &= -2''539\ (Y_2-Y_1)\ (X_{1/3}-0.5)\end{aligned}$$

όπου τα Υ σε km και το $X_{1/3}$ σε Mm. Το $X_{1/3}$ είναι η τιμή του Χ στο $\frac{1}{3}$ της απόστασης ή $X_{1/3}=\frac{2X_1+X_2}{3}$.

Πρέπει να σημειωθεί ότι στην προβολή Hatt οι παραμορφώσεις είναι αμελητέες μόνο επειδή έχουμε περιορίσει σε 30΄ την έκταση εφαρμογής της. Αν χρησιμοποιήσουμε Ε.Μ.Π. σε ζώνες 30΄ θα έχουμε πάλι αμελητέες παραμορφώσεις.

8. ΠΩΣ ΣΥΝΔΕΕΤΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ΄ 87 ΜΕ ΤΑ ΥΠΑΡΧΟΝΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Για να μεταβούμε από ένα σύστημα ΓΣΑ (1) σε ένα άλλο ΓΣΑ (2) θα πρέπει να λάβουμε υπόψη μας

την αλλαγή του datum
την αλλαγή του δικτύου
την αλλαγή της προβολής

ή οποιοδήποτε συνδιασμό τους έχει εφαρμογή.

Η γενική σχέση που συνδέει τα δύο συστήματα είναι:

$$\varphi_2=\varphi_1 + Q_\varphi + R_\varphi + U_\varphi$$

$$\lambda_2=\lambda_1 + Q_\lambda + R_\lambda + U_\lambda$$

ή

$$X_2=X_1 + Q_X + R_X + P_X + U_X$$

$$Y_2=Y_1 + Q_Y + R_Y + P_Y + U_Y$$

όπου Q, R και P η μεταβολή λόγω αλλαγής του datum, του δικτύου και της προβολής αντιστοιχα και U ένας υπολοιπόμενος όρος που θεωρείται θόρυβος (σφάλμα) αλλά που μπορεί να περιέχει και κάποιο σήμα (συστηματικό όρο)

Η αλλαγή του datum αναφέρεται σε αλλαγή του ελλειψοειδούς και της αφετηρίας (συντεταγμένες αρχικού σημείου) θεωρείται όμως κατά κανόνα ότι τα δύο ελλειψοειδή είναι παράλληλα.

Η μετατροπή από το ένα datum στο άλλο, δηλαδή ο όρος Q, γίνεται μέσω των καρτεσιανών συντεταγμένων και την παράλληλή τους μετάθεση κατά ΔΧ, ΔΥ, ΔΖ.

Στη πράξη παρατηρείται ότι τα ελλειψοειδή δεν είναι παράλληλα αλλά έχουν μικρές στροφές και έχουν και διαφορετική κλίμακα. Η επίδραση αυτή που εκφράζεται με τον όρο R συνήθως οφείλεται στο δίκτυο που παρουσιάζει συστηματικά σφάλματα που εκφράζονται με κλίμακα (παραμόρφωσης) κ και μιά στροφή (μικρή συνήθως) ε αν έχουμε επιφανειακά δίκτυα. (Στην περίπτωση τριδιάστατων δικτύων θα έχουμε τρεις στροφές Σ1 Σ2 Σ3).

$$(X_2 - X_1) = \kappa\ (X-X_\circ) + \varepsilon\,(Y-Y_\circ)$$

$$(Y_2 - Y_1) = \kappa\ (Y-Y_\circ) - \varepsilon\,(X-X_\circ)$$

όπου $X_\circ$ $Y_\circ$ οι συντεταγμένες του κέντρου βάρους των σημείων.

Αν είναι γνωστή η παράλληλη μετάθεση ΔΧ,ΔΥ,ΔΖ των ελλειψοειδών και η στροφή και κλίμακα μεταξύ των δύο συστημάτων μπορούμε να περάσουμε από το ένα στο άλλο.

Αλλά και το αντίστροφο, αν είναι γνωστές οι συντεταγμένες σε δύο συστήματα μπορούμε να υπολογίσουμε (και με ΜΕΤ) τις παραμέτρους ΔΧ,ΔΥ,ΔΖ, κ,ε, που τα συνδέουν.

Συγκρίνοντας δύο συστήματα μπορεί κανείς στους υπολοιπόμενους όρους U να προσαρμόσει δυδιάστατες συναρτήσεις (π.χ.πολυώνυμα) ώστε, εμπειρικά πιά, να βρει τη φαινομενολογική σχέση των δύο συστημάτων με μεγαλύτερη ακρίβεια.

Για να βρεθεί η σχέση που συνδέει το παλαιό ελληνικό σύστημα (Bessel) και που έχει τη μεγαλύτερη διάδοση σε όλους τους τομείς, έγινε μιά πρώτη προσέγγιση,συγκρίνοντας 23 κοινά σημεία. Το αποτέλεσμα που προέκυψε για τη μετάβαση από το παλαιό στο ΕΓΣΑ ΄87 είναι:

$\Delta X=+656$ m, $\Delta Y=+299$ m, $\Delta Z=+251$ m

$\kappa=+15.9$ppm, $\varepsilon=+17.6$ppm$=+3''.63$

Οι υπολοιπόμενοι όροι έχουν μιά RMS τιμή $\pm$ 2.06m στα X και $\pm$2.91m στα Y που αντιστοιχεί σε ένα τυπικό κύκλο αβεβαιότητας 2.52m

Η τιμή αυτή είναι σχετικά μεγάλη αλλά είναι λογική αν λάβει κανείς υπόψη του ότι το παλαιό σύστημα αναφοράς στηριζόταν κατά μεγάλο ποσοστό σε παλαιές μετρήσεις και υπολογισμούς. Σε αντίθεση, η σύγκριση με τη νέα συνόρθωση του δικτύου Iης στο νέο datum συμφωνεί στα 0.30m που είναι ιδιαίτερα ικανοποιητικό.

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

	DATUM	ΑΦΕΤΗΡΙΑ	ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ*	ΔΙΚΤΥΟ	ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ	ΠΡΟΒΟΛΗ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΕΠΙΓΕΙΑ	ΕΛΛΗΝΙΚΟ (ΠΑΛΑΙΟ BESSEL)	ΑΣΤΕΡΟΣΚΟΠΕΙΟ	BESSEL	ΠΑΛΑΙΟ (ΠΡΟ 1940) ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	ΠΡΟ ΤΟΥ 1940 ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	HATT	ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΙΟ ΔΙΑΔΕΔΟΜΕΝΟ
	"	"	"	"	"	ΕΜΠ 3°	ΥΠ.ΠΕ.ΧΩ.-Δ.Ε.
	ΕΛΛΗΝΙΚΟ (ΝΕΟ BESSEL)	ΚΤΥΠΑΣ	"	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑ ΤΟ 1975	1982	HATT	Γ.Υ.Σ. ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΟΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΙ
	ED 50	POTSDAM	HAYFORD	ΠΑΛΑΙΟ (ΠΡΟ 1940) ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	1950 ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	UTM	ΕΥΡΩΠΑΙΚΟ
ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΑ	WGS 72	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ	WGS 72	ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ (DOPPLER)	1972	———	ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ
	WGS 84	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ	GRS 80	ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ (DOPPLER + GPS)	1984	———	ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ
	BTS	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ	GRS 80	ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ	ΝΕΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΟ	———	ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ
	ΕΓΣΑ 87	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ ΜΕΤΑΤΕΘΗΜΕΝΟ	GRS 80	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑ 7. ΜΑΖΙ ΜΕ ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΕΣ	1987	ΕΜΠ (UTM με $\lambda_o=24°$)	ΕΛΛΗΝΙΚΟ + ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ

* BESSEL	a=6 377 397.155	f=1/299.1528128
HAYFORD	a=6 378 388	f=1/297
WGS 72	a=6 378 135	f=1/298.26
GRS 80	a=6 378 137	f=1/298.2572236

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

$$Y=Y_{\circ}+A_2\Delta\lambda^2+A_4\Delta\lambda^4+A_6\Delta\lambda^6 \qquad (Y_{\circ}=K_{\circ}M)$$

$$X=X_{\circ}+B_1\Delta\lambda\ +B_3\Delta\lambda^3+B_5\Delta\lambda^5 \qquad (X_{\circ}=0.5Mm)$$

$$\varphi=\varphi_{\circ}+D_2\Delta X^2+D_4\Delta X^4+D_6\Delta X^6$$

$$\lambda=\lambda_{\circ}+E_1\Delta X\ +E_3\Delta X^3+E_5\Delta X^5 \qquad (\lambda_{\circ}=24^{\circ})$$

$$\gamma=\quad C_1\Delta\lambda\ +C_3\Delta\lambda^3+C_5\Delta\lambda^5$$

$$=\quad F_1\Delta X\ +F_3\Delta X^3+F_5\Delta\lambda^5$$

$$\delta_{12}=\quad G_1(Y_2-Y_1)\Delta X_{\frac{1}{3}}+G_3(Y_2-Y_1)\Delta X^3_{\frac{1}{3}}$$

$$K=K_{\circ}+K_2\Delta X^2+K_4\Delta X^4 \qquad (K_{\circ}=0.99960($$

$$=K_{\circ}+L_2\Delta\lambda^2+L_4\Delta\lambda^4$$

Οι συντελεστές A,B,C,D,E,F,G,K,L είναι συναρτήσεις του πλάτους και των παραμέτρων του ελλειψοειδούς αναφοράς.

M είναι το μήκος του μεσημβρινού από τον Ισημερινό μέχρι το πλάτος φ

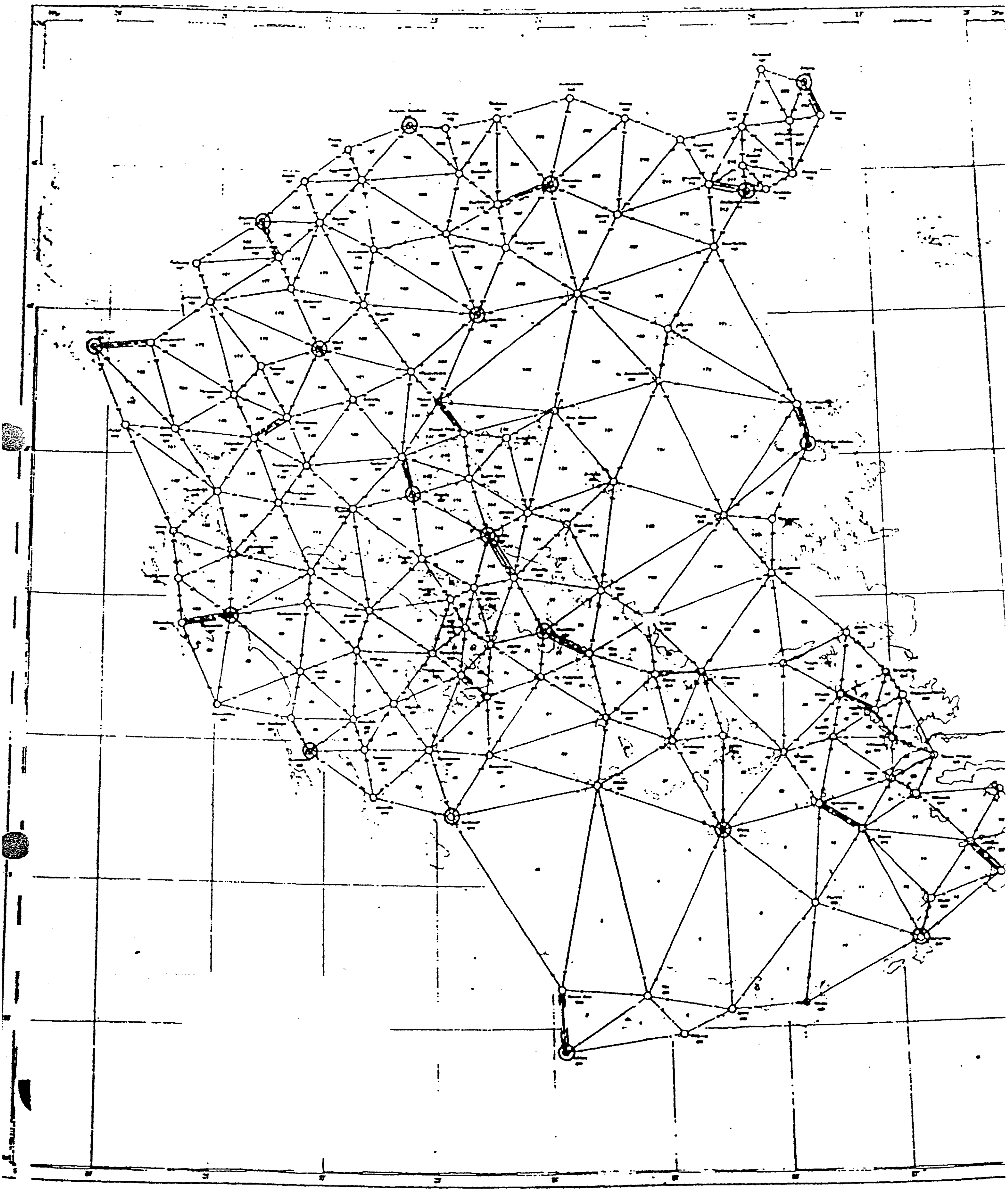
$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_{\circ}$, $\Delta X=X-X_{\circ}$

$\varphi_{\circ}$ είναι το πλάτος που αντιστοιχεί σε τόξο μεσημβρινού Y ανηγμένο στην κλίμακα $K_{\circ}$

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΓΕΩΓΡ. ΥΠΗΡ. ΣΤΡΑΤΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ 1ης ΤΑΞΕΩΣ

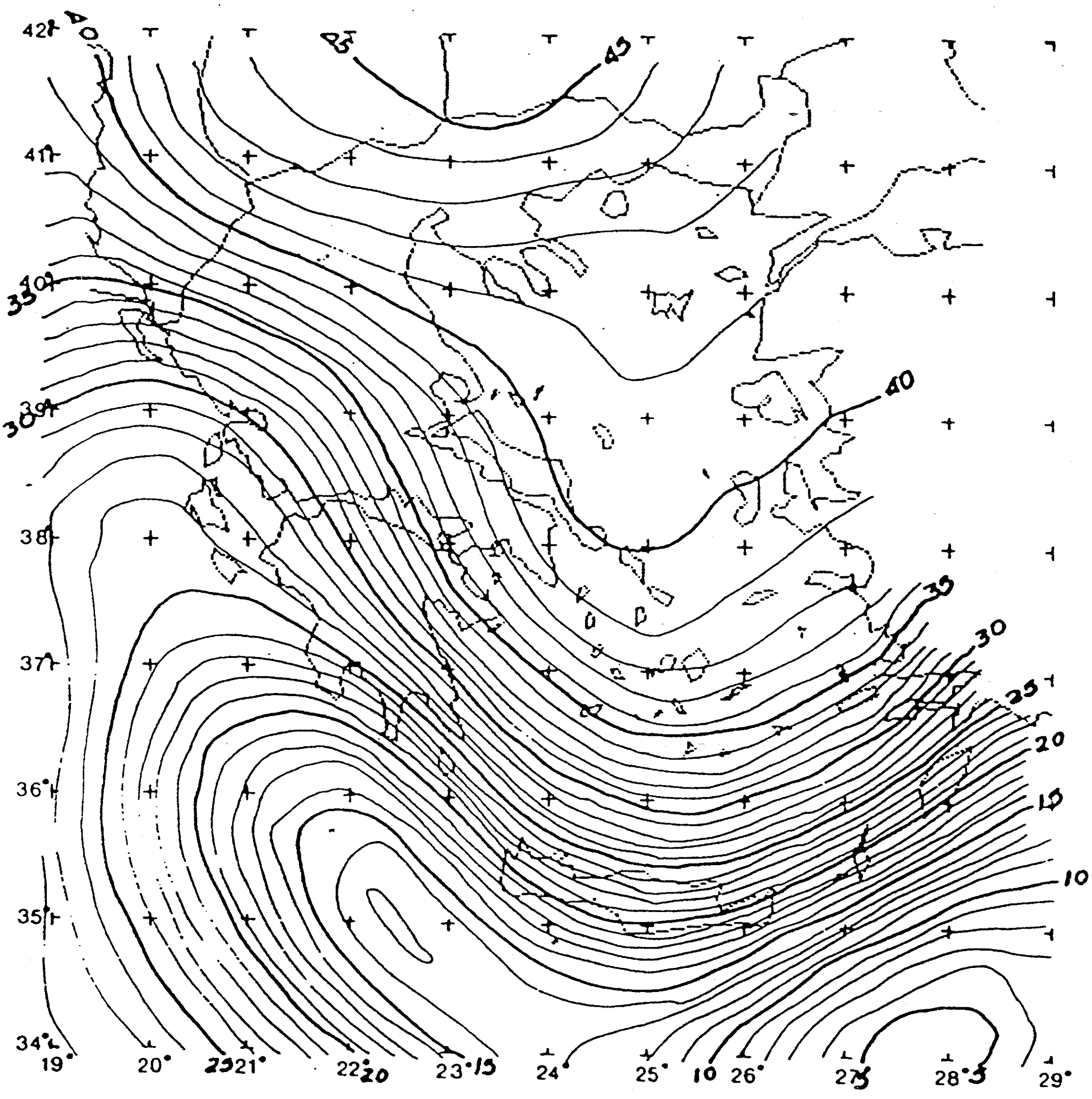


o ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ (137)

◎ ΣΗΜΕΙΟ LAPLACE (20)

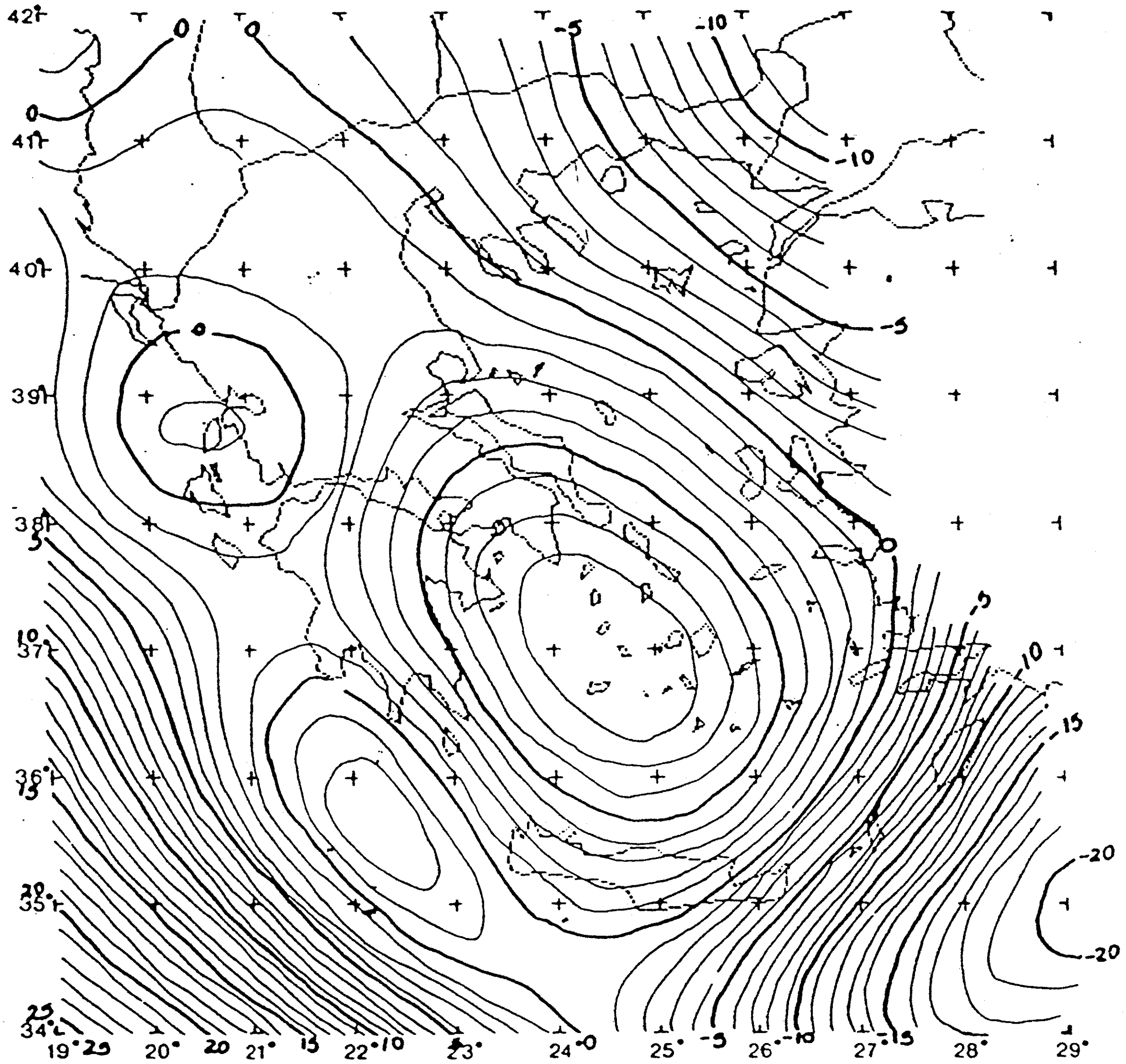
—— ΜΕΤΡΗΜΕΝΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ (720)

ΜΕΤΡΗΜΕΝΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ (17)

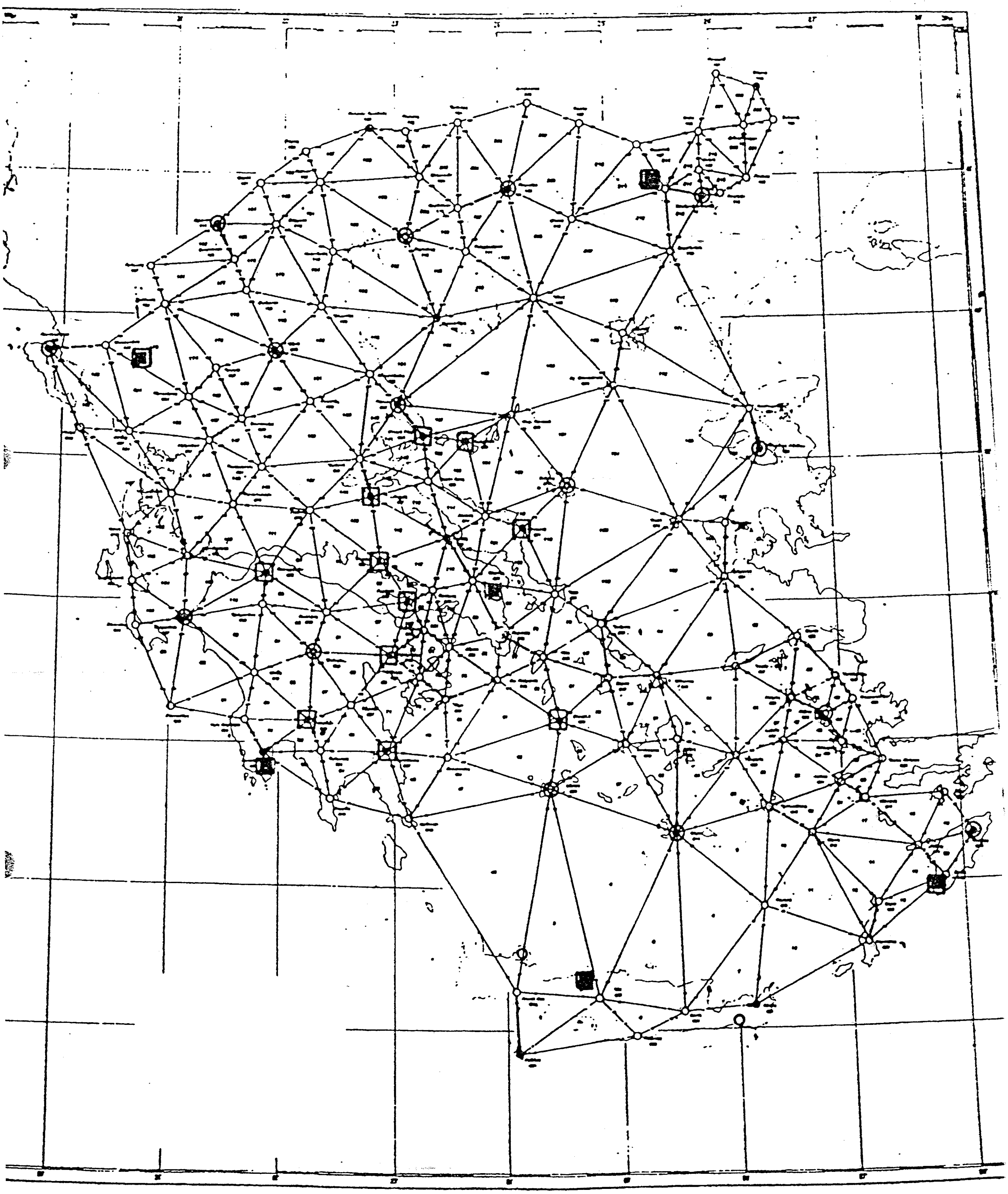


ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΜΕΝΟ (50Km) ΓΕΩΕΙΔΕΣ, ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟ ΣΤΟ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ΤΟΥ GRS 80 (a=6.378.137 m, f=1/298.25722)

ΣΧ 2



ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ (ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΜΕΝΟ) ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΣΤΟ ΕΓΣΑ'87



○ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ Ι°ς

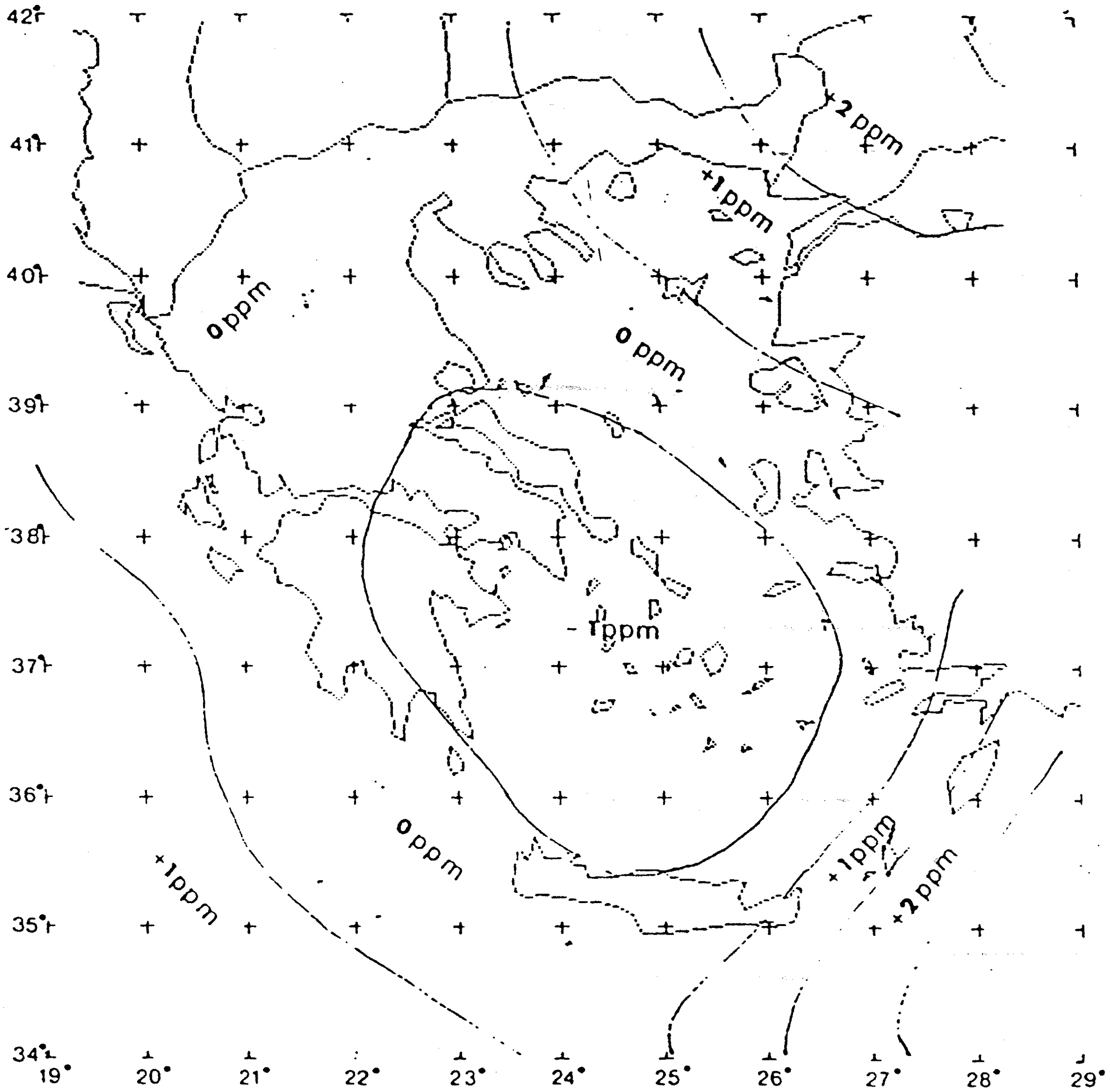
◉ ΣΤΑΘΜΟΣ DOPPLER ΔΙΚΤΥΟΥ

■ ΣΤΑΘΜΟΣ LASER

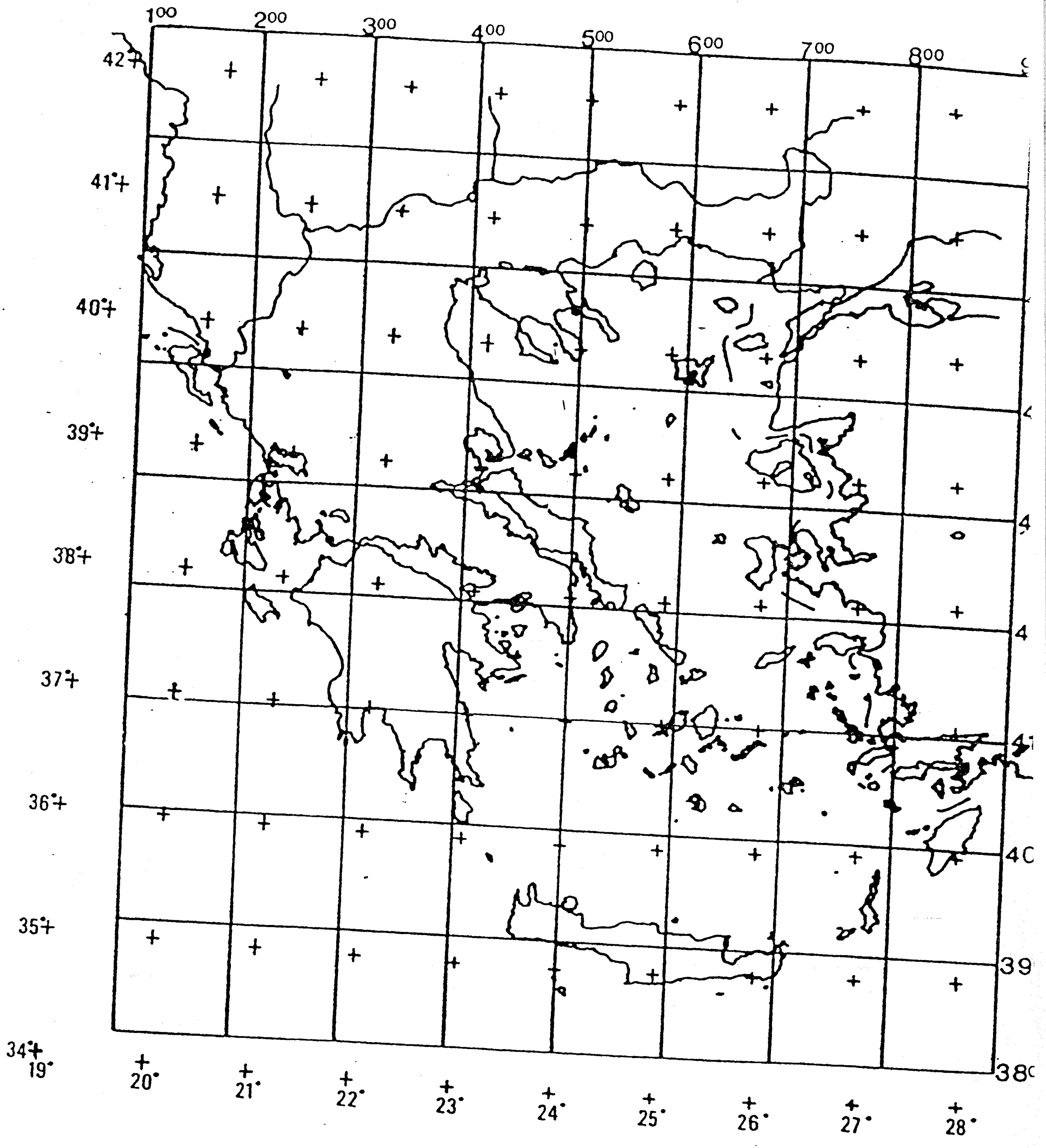
▣ ΣΤΑΘΜΟΣ GPS ΔΙΚΤΥΟΥ

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ Ιης
ΜΕ ΤΟΥΣ ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟΥΣ ΣΤΑΘΜΟΥΣ

ΣΧ 4



ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΑΝΑΓΩΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΑΠΟ ΤΟ Ν ΣΤΟ ΕΓΣΑ ' 87

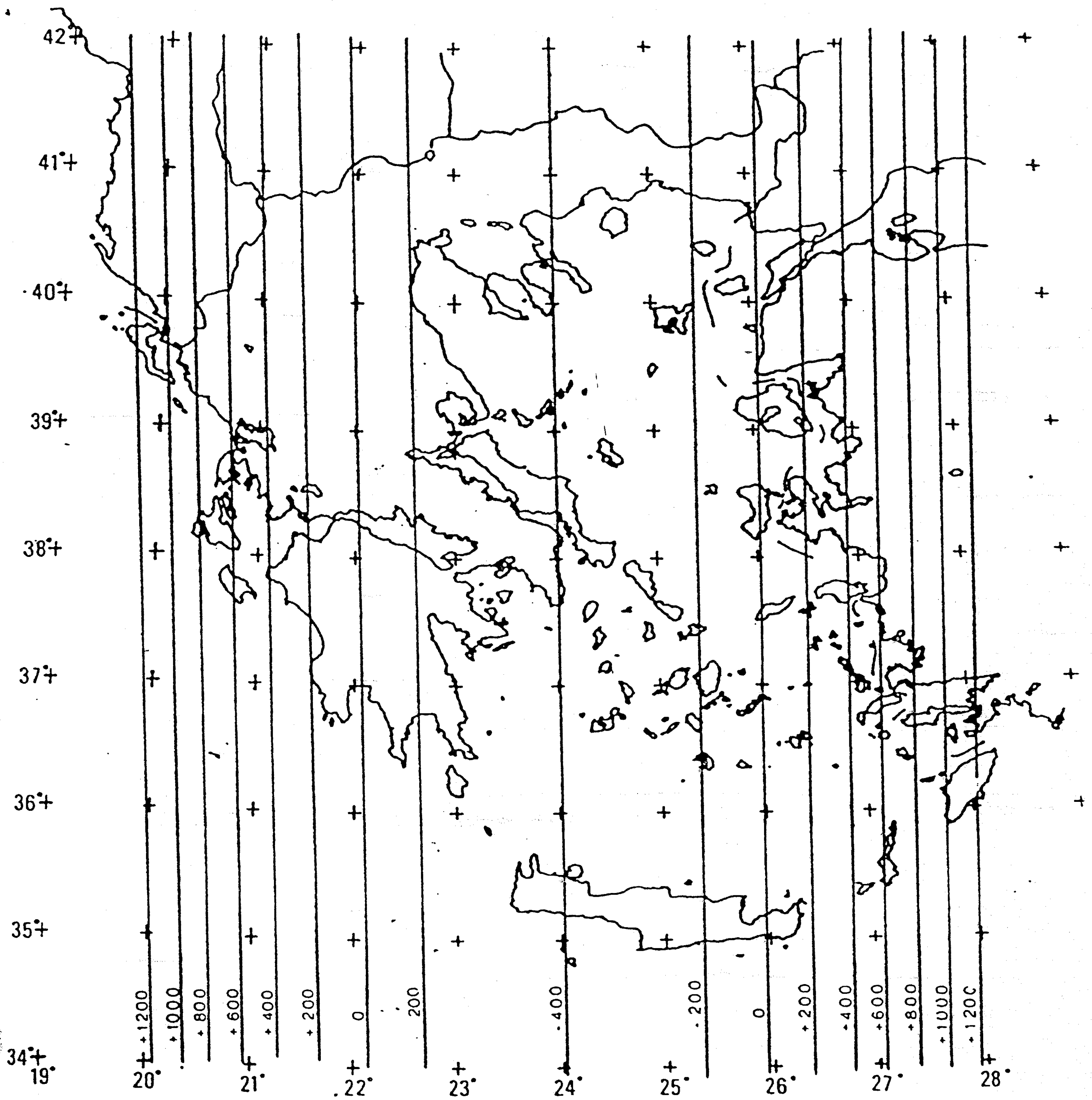


ΔΙΚΤΥΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΚΑΝΑΒΟΥ

ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

$\lambda_o=24^\circ$. $K_o=0.999600$

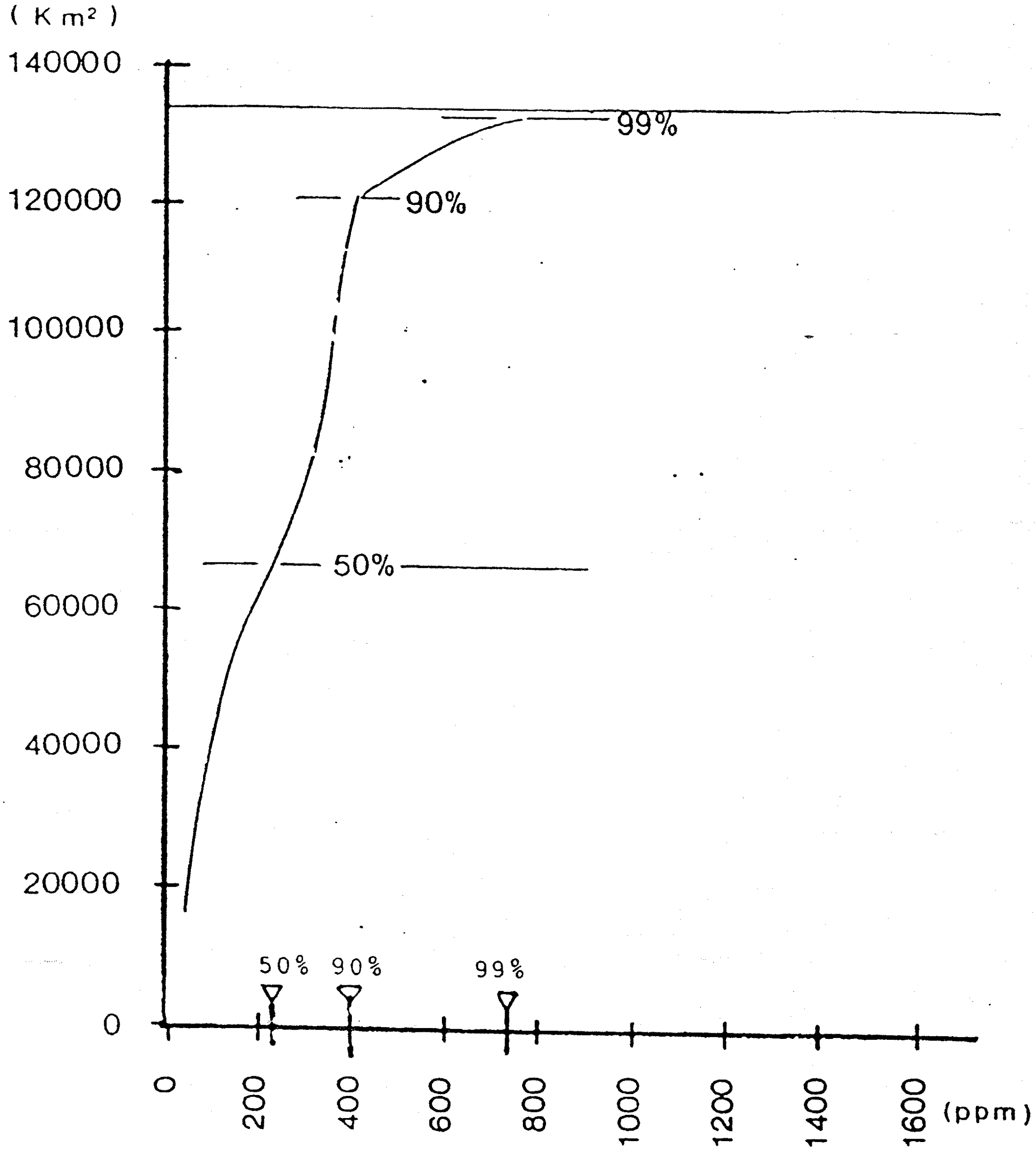
ΚΛΙΜΑΚΑ 1:5M



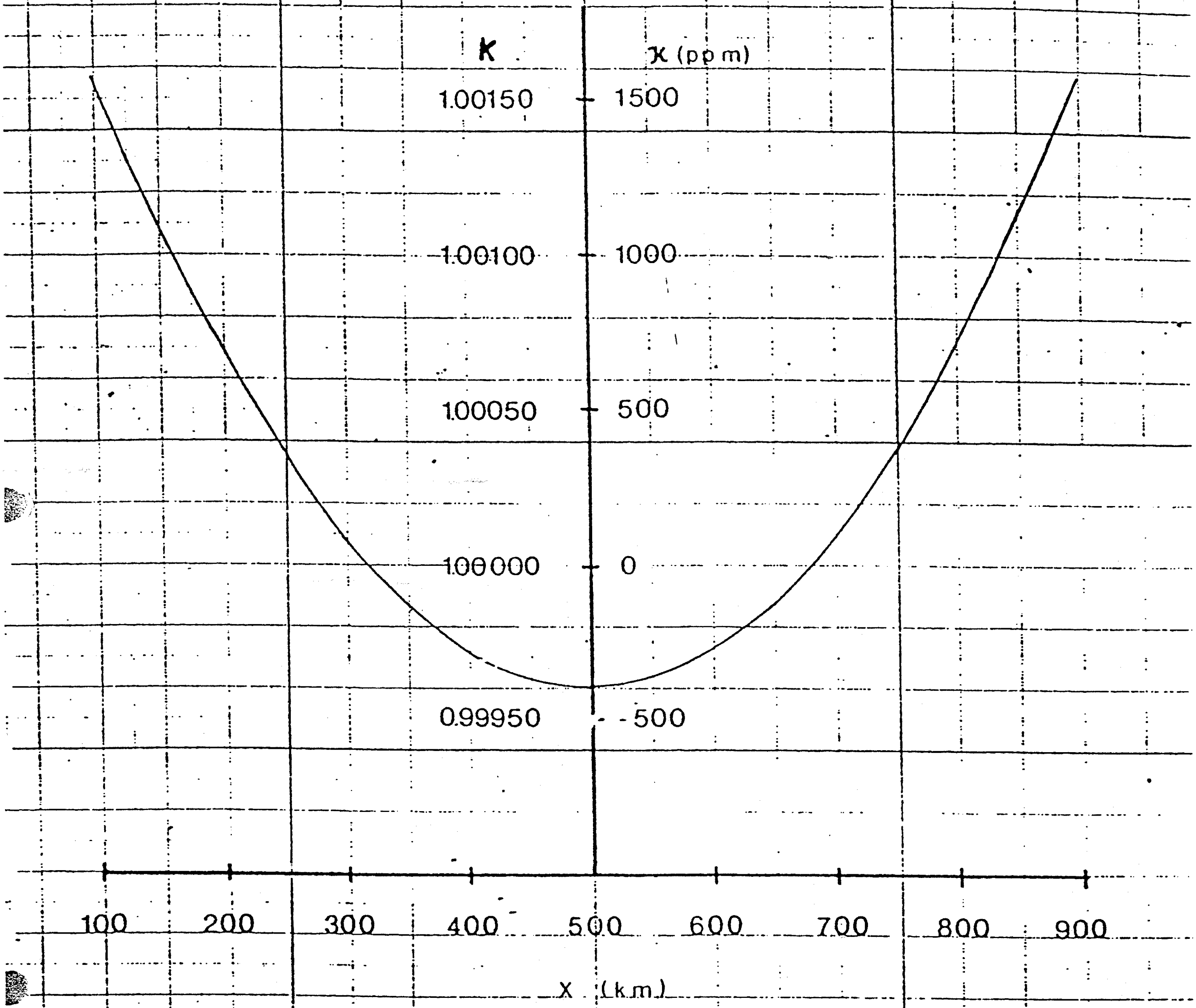
ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ (ΣΕ ppm)

ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

$\lambda_0=24^\circ$ $K_0=0.999600$



ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (κ)
ΣΤΗΝ ΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΧΩΡΑΣ



ΚΛΙΜΑΚΑ Κ ΚΑΙ ΚΛΙΜΑΚΑ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (κ)

ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗ

K_o=0.999600

ΣΧ 9

τα προβολικα συστηματα που χρησιμοποιουνται σημερα στην ελλαδα

α-μ αγατzα - μπαλοδημου

Αθήνα, Νοέμβριος 1988

Π Ρ Ο Λ Ο Γ Ο Σ

Τα προβολικά συστήματα που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα είναι, η αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή του HATT και δύο συστήματα Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής, ενώ πρόσφατα υιοθετήθηκε ένα τρίτο σύστημα Εγκάρσιας Μερκατορικής Προβολής.

Μετά από μιά εισαγωγή στις βασικές έννοιες των προβολών γίνεται σύντομη ανάπτυξη των παραπάνω συστημάτων.

Δίνονται οι σχέσεις που συνδέουν τις γεωδαιτικές συντεταγμένες με τις επίπεδες στις προβολές αυτές και οι σχέσεις για αναγωγές μηκών και γωνιών. Δίνεται ακόμη η διαδικασία που πρέπει να ακολουθείται για τους υπολογισμούς στην προβολή καθώς και υποδείγματα πινάκων για κάθε μία από τις προβολές που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα.

Συμβολισμοί

φ = Γεωδαιτικό πλάτος

λ = Γεωδαιτικό μήκος

α = μεγάλος ημιάξονας ελλειψοειδούς

f = επιπλάτυνση ελλειψοειδούς

$e = (2f-f^2)^{1/2}$ = πρώτη εκκεντρότητα ελλειψοειδούς

$e' = \left(\frac{e^2}{1-e^2}\right)^{1/2}$ = δεύτερη εκκεντρότητα ελλειψοειδούς

$\rho = \alpha(1-e^2)/(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}$ = ακτίνα καμπυλότητας μεσημβρινού

$N = \alpha/(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}$ = ακτίνα καμπυλότητας κάθετης τομής

$M_{\varphi_o}^{\varphi} = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \rho d\varphi$ = τόξο μεσημβρινού από φ_o έως φ

$$M_{\varphi_o}^{\varphi} = M_o(\varphi-\varphi_o)-2M_2\sin(\varphi-\varphi_o)\cos(\varphi+\varphi_o)+2M_4\sin 2(\varphi-\varphi_o)\cos 2(\varphi+\varphi_o)$$

$$-2M_6\sin 3(\varphi-\varphi_o)\cos 3(\varphi+\varphi_o)$$

όπου

$$M_o = \alpha(1-\frac{1}{4}e^2 - \frac{3}{64}e^4 - \frac{5}{256}e^6 \ldots)$$

$$M_2 = \frac{3}{8}\alpha(e^2 + \frac{1}{4}e^4 + \frac{15}{128}e^6 \ldots)$$

$$M_4 = \frac{15}{256}\alpha(e^4 + \frac{3}{4}e^6 \ldots)$$

$$M_6 = \frac{35}{3072}\alpha(e^6 + \ldots)$$

Πίνακας Περιεχομένων

1. Εισαγωγή - Βασικές έννοιες

Προβολικό σύστημα ή και απλά προβολή στη Γεωδαισία και Χαρτογραφία, ονομάζεται οποιοδήποτε σύστημα που επιτρέπει την απεικόνιση σημείων του ελλειψοειδούς ή της σφαίρας στο επίπεδο, έτσι ώστε να υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.

Επειδή η σφαίρα και το ελλειψοειδές δεν είναι αναπτυκτές επιφάνειες αποκλείεται να γίνει η απεικόνιση των στοιχείων τους στο επίπεδο χωρίς παραμορφώσεις.

Το πρόβλημα της απεικόνισης επιδέχεται απειρία λύσεων και η επιλογή της κατάλληλης υπαγορεύεται από το σκοπό που θα εξυπηρετήσει, την περιοχή και την έκταση που θα καλύψει.

Γιά να ορισθεί ένα προβολικό σύστημα, χρειάζονται σχέσεις, που να συνδέουν αμφιμονοσήμαντα τις θέσεις σημείων στη σφαίρα ή το ελλειψοειδές με τις αντίστοιχες στο επίπεδο. Οι θέσεις στη σφαίρα ή το ελλειψοειδές, δίνονται με τις Γεωγραφικές ή Γεωδαιτικές συντεταγμένες φ,λ που ορίζουν ένα δίκτυο κάθετα τεμνόμενων μη ισομετρικών γραμμών (μεσημβρινοί και παράλληλοι). Στο επίπεδο χρησιμοποιούνται συνήθως οι καρτεσιανές συντεταγμένες x,y και στις περισσότερες περιπτώσεις σαν άξονας τεταγμένων y θεωρείται η διεύθυνση του Βορρά (Διεύθυνση μεσημβρινού) σε κάποιο σημείο. Σε ορισμένα συστήματα αντί του συμβολισμού x,y έχει υιοθετηθεί ο συμβολισμός E,N που προέρχεται από τις Αγγλικές λέξεις East (Ανατολή) και North (Βορράς).

Ανάλογα με τα στοιχεία που διατηρούνται χωρίς παραμορφώσεις στη προβολή, η προβολή ονομάζεται :

α. Ισαπέχουσα αν διατηρούνται αποστάσεις από ορισμένα σημεία.
β. Σύμμορφη αν διατηρούνται οι μορφές στοιχειωδών σχημάτων.
γ. Ισοδύναμη αν διατηρούνται τα εμβαδά στοιχειωδών σχημάτων.

Γιά τον ορισμό ενός προβολικού συστήματος απαιτούνται αρχικά οι σχέσεις :

$$x = f_1(\varphi,\lambda)$$
$$y = f_2(\varphi,\lambda)$$

και φυσικά οι

$$\varphi = f_3(x,y)$$
$$\lambda = f_4(x,y)$$

Αν πρόκειται μιά προβολή να χρησιμοποιηθεί στη Γεωδαισία με σκοπό να γίνονται οι υπολογισμοί με σχέσεις επίπεδης Τριγωνομετρίας, είναι απαραίτητο να δίνονται και οι σχέσεις αναγωγής μηκών και γωνιών (που έχουν ήδη αναχθεί στο ελλειψοειδές) στην προβολή.

Για Τοπογραφικές εργασίες, όπου οι υπολογισμοί γίνονται πάντα με σχέσεις επίπεδης Τριγωνομετρίας, που βέβαια σημαίνει προσέγγιση του ελλειψοειδούς με επίπεδο εφαπτόμενο στο κέντρο της περιοχής που γίνεται η εργασία, αν δεν ενδιαφέρει η ένταξη της εργασίας στο κρατικό σύστημα δεν απαιτείται αναγωγή των στοιχείων στη προβολή.

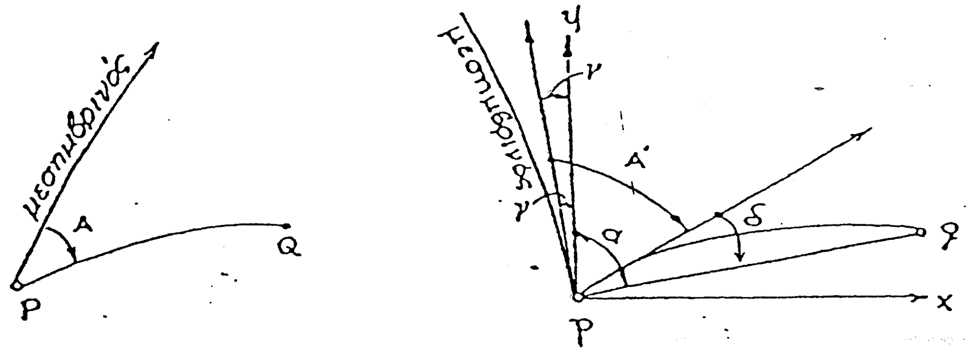
Αν όμως χρησιμοποιηθούν συντεταγμένες του κρατικού δικτύου (ένταξη στο κρατικό σύστημα) θα πρέπει ανάλογα με το σύστημα προβολής που έχει υιοθετηθεί, να γίνονται οι απαιτούμενες κάθε φορά αναγωγές. Ετσι εκτός από τις σχέσεις που συνδέουν τις γεωδαιτικές ή γεωγραφικές συντεταγμένες με τις επίπεδες θα πρέπει να δίνονται και σχέσεις γιά :

α. Την Κλίμακα προβολής σε σημείο, που είναι ο λόγος $\kappa = \frac{ds}{dS}$ όπου ds το μήκος ενός στοιχειώδους τμήματος στη προβολή και dS το αντίστοιχο μήκος στο ελλειψοειδές ή την σφαίρα. Γενικά η κλίμακα σε σημείο εξαρτάται από τη θέση του στοιχειώδους τμήματος και τον προσανατολισμό του με μόνη εξαίρεση τις σύμμορφες προβολές, όπου εξαρτάται μόνο από τη θέση . Σε κάθε σημείο μιάς μη σύμμορφης προβολής, υπάρχει ένα ζευγάρι κάθετα τεμνόμενων διευθύνσεων που αντιστοιχούν στη μέγιστη και ελάχιστη κλίμακα.

β. Την Κλίμακα πεπερασμένης απόστασης, που είναι το ολοκλήρωμα της κλίμακας κατά μήκος ενός πεπερασμένου τμήματος μιάς γραμμής. Ετσι, έστω και αν η προβολή είναι σύμμορφη επειδή η κλίμακα αλλάζει από σημείο σε σημείο η κλίμακα πεπερασμένης απόστασης εξαρτάται από τη θέση και των δύο άκρων του τμήματος.
Στις αναγωγές των αποστάσεων μιάς σύμμορφης προβολής, το αν θα θεωρηθεί μιά απόσταση σαν στοιχειώδης ή πεπερασμένη εξαρτάται από τις απαιτούμενες ακρίβειες και τα χαρακτηριστικά της συγκεκριμμένης προβολής.

γ. Την Σύγκλιση του μεσημβρινού γ που είναι η γωνία που σχηματίζει η προβολή της εφαπτόμενης του μεσημβρινού σε ένα σημείο με τον άξονα των τεταγμένων (y ή N).

δ. Τις γωνιακές παραμορφώσεις. Αν η προβολή είναι σύμμορφη, γωνιακή παραμόρφωση δεν υπάρχει, αλλά αν η απόσταση μεταξύ δύο σημείων P,Q είναι τέτοια που να απαιτείται γιά την αναγωγή της η κλίμακα πεπερασμένης απόστασης, απαιτείται και μιά γωνιακή διόρθωση δ που είναι η γωνία της εφαπτόμενης της προβολής p,q της Γεωδαισιο γραμμής P,Q με τη χορδή p,q. Η γωνία δ εξαρτάται από τις συντεταγμένες και των δύο σημείων P,Q. Αν δίνονται όλα τα παραπάνω στοιχεία, είναι δυνατή η αναγωγή των αποστάσεων στην προβολή και των Γεωδαιτικών αζιμουθίων σε γωνίες διεύθυνσης στην προβολή (σχ.1).



σχ. 1

Γιά τις παραπάνω αναγωγές ισχύουν οι σχέσεις :

$S_{pq} = k \cdot S_{PQ}$ (όπου k κατά περίπτωση κλίμακα στο σημείο P ή κλίμακα πεπερασμένης απόστασης P,Q).

$A' = A+\varepsilon$ (ε παραμόρφωση γωνίας A, αν η προβολή είναι σύμμορφη ε=0).

$\alpha = A'-\gamma+\delta$

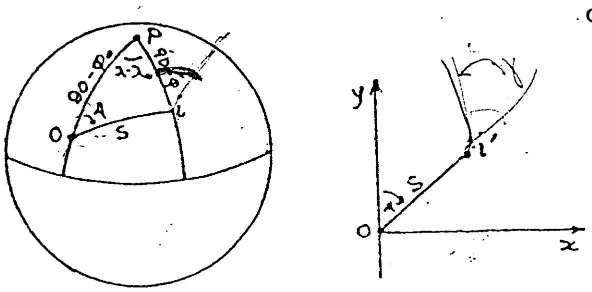
2. Ἀζιμουθιακή Ἰσαπέχουσα προβολή Hatt

2.1. Γενικά

Ἡ θέση i' ἑνός σημείου i στήν προβολή αὐτή ὁρίζεται ὡς πρός κάποιο κέντρο O (φ_o, λ_o) διατηρώντας στό ἐπίπεδο τό μῆκος S τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς Oi καί τό Ἀζιμούθιο A τῆς πλευρᾶς Oi στό σημεῖο O ὁπότε:

$$x_i = S \sin A \qquad \text{καί} \qquad y_i = S \cos A$$

Οἱ σχέσεις πού συνδέουν ἐπίπεδες μέ γεωδαιτικές συντεταγμένες ἄν θεωρηθεῖ σάν γεωδαιτική ἐπιφάνεια ἀναφορᾶς ἡ σφαῖρα προκύπτουν ἀπό τήν ἐπίλυση τοῦ σφαιρικοῦ τριγώνου POi (σχ. 2).



Σχῆμα 2

α) Ὅταν ζητοῦνται οἱ ἐπίπεδες συντεταγμένες καί δίνονται οἱ γεωδαιτικές φ,λ τότε εἶναι γνωστές οἱ πλευρές $Pi = 90-\varphi$, $PO = 90-\varphi_o$ καί ἡ γωνία $OPi = \lambda-\lambda_o$ καί ζητοῦνται ἡ πλευρά $Oi = S$ καί τό ἀζιμούθιο $POi = A$. Ἄρα:

$$S = R \arccos(\sin\varphi_o \sin\varphi + \cos\varphi_o \cos\varphi \cos(\lambda-\lambda_o))$$

$$A = \arcsin \frac{\sin(\lambda-\lambda_o)\cos\varphi}{\sin(S/R)}$$

β) Ὅταν ζητοῦνται οἱ γεωδαιτικές συντεταγμένες τότε εἶναι γνωστά ἡ γωνία $POi = A$ καί οἱ πλευρές $PO = 90-\varphi_o$ καί $Oi = S$ καί ζητοῦνται ἡ πλευρά $Pi = 90-\varphi$ καί ἡ γωνία $OPi = \lambda - \lambda_o$. Ἄρα:

$$\varphi = \arcsin(\sin\varphi_o \cos\frac{S}{R} + \cos\varphi_o \sin\frac{S}{R} \cos A)$$

$$\lambda - \lambda_o = \arcsin\left(\frac{\sin A \sin\frac{S}{R}}{\cos\varphi}\right)$$

γ) Οἱ κύριες κλίμακες ἔχουν τίς διευθύνσεις A_{oi} καί $A_{oi} + 90^o$.

$$\kappa_{min} = \kappa_A = 1$$

$$\kappa_{max} = \kappa_{A+90^o} = \frac{\mathrm{arc}(S/R)}{\sin(S/R)}$$

Στήν περίπτωση πού ἡ γεωδαιτική ἐπιφάνεια ἀναφορᾶς εἶναι τό ἐλλειψοειδές ἐκ περιστροφῆς οἱ σχέσεις γίνονται πιό πολύπλοκες καί ἐκφράζονται εὐκολότερα μέ συγκλίνουσες σειρές. Τό πρόβλημα στήν προβολή αὐτή ταυτίζεται μέ τό πρόβλημα τῆς γεωδαιτικῆς μεταφορᾶς διότι διατηρεῖται ἡ ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο καί τό ἀζιμούθιο στό κέντρο.

Ἡ προβολή αὐτή δέν εἶναι σύμμορφη καί οἱ παραμορφώσεις αὐξάνονται μέ τήν ἀπόσταση ἀπό τό κέντρο. Ἔτσι στήν ἐφαρμογή τῆς προβολῆς στήν Ἑλλάδα, γιά τήν ἀποφυγή ἀναγωγῶν, δέν ἔχει προβληθεῖ ἡ χώρα ὡς πρός ἕνα κέντρο ἀλλά θεωροῦνται κέντρα πού ἀπέχουν μεταξύ τους κατά 30' σέ γεωγραφικό μῆκος καί πλάτος.

2.2. Σχέσεις μεταξύ ἐπιπέδων καί Γεωδαιτικῶν συντεταγμένων στό ἐλλειψοειδές

Ὅπως ἀναφέρθηκε ἄν S εἶναι τό μῆκος τῆς Γεωδαισιακῆς γραμμῆς πού συνδέει ἕνα σημεῖο μέ τό κέντρο καί A τό ἀζιμούθιο στό κέντρο τότε:

$$x = S \sin A$$

$$y = S \cos A$$

Ὁ ἄξονας τῶν τεταγμένων y ταυτίζεται μέ τήν ἐφαπτόμενη στόν μεσημβρινό στό κέντρο ἐνῶ ὁ ἄξονας τῶν τετμημένων x μέ τήν ἐφαπτομένη στόν παράλληλο στό κέντρο.

Μέ τήν παραδοχή ὅτι τά μήκη S εἶναι μικρά, οἱ ποσότητες $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_o$ $\Delta\lambda = \lambda-\lambda_o$ καί $\Delta A = A'-A$ μποροῦν νά θεωρηθοῦν σάν συναρτήσεις f(S) καί νά ἀναλυθοῦν σέ σειρές Macclaurin στό κέντρο $O(\varphi_o,\lambda_o)$.

Ἡ γενική ἔκφραση τῆς σειρᾶς εἶναι:

$$f(S) = S \frac{df}{dS} + \frac{S^2}{2!}\frac{d^2f}{dS^2} + \frac{S^3}{3!}\frac{d^3f}{dS^3} + \cdots \qquad (1)$$

Ἀπό τίς σχέσεις τῶν στοιχειωδῶν τμημάτων στήν ἐπιφάνεια τοῦ ἐλλειψοειδοῦς ἔχουμε ὅτι:

$$\frac{d\varphi}{dS} = \frac{\cos A}{\rho} \qquad (2)$$

$$\frac{d\lambda}{dS} = \frac{\sin A}{N\cos\varphi} \qquad (3)$$

Ἀπό τήν ἰδιότητα τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς $N\cos\varphi\sin A$ = σταθ. προκύπτει ὅτι:

$$\frac{dA}{dS} = \frac{\tan\varphi \sin A}{N} \qquad (4)$$

Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ Γεωγραφικοῦ πλάτους φ θεωροῦμε $\Delta\varphi=\varphi-\varphi_o= f(S)$ ὁπότε

$$\Delta\varphi = S\left(\frac{d\varphi}{dS}\right)_{\varphi_o} + \frac{S^2}{2!}\left(\frac{d^2\varphi}{dS^2}\right)_{\varphi_o} + \cdots \qquad (5)$$

Μέ διαδοχικές παραγωγήσεις τῆς (2) ἔχουμε:

$$\Delta\varphi = \frac{S\cos A}{\rho_o} - \frac{S^2\sin^2 A\,tg\varphi_o}{2\rho_o N_o} - \frac{3S^2\cos A e'^2\, tg\,\varphi_o\cos^2\varphi_o}{2\rho_o N_o} - \dots$$

Μέ ἀντικατάσταση τῶν $S\cos A = y$ καί $S\sin A = x$ καταλήγουμε στήν:

$$\Delta\varphi=\varphi-\varphi_o = \frac{1}{\rho_o}y - \frac{tg\varphi_o}{2\rho_o N_o}x^2 - \frac{3e'^2 tg\varphi_o\cos^2\varphi_o}{2\rho_o N_o}y^2 - \frac{1+3tg^2\varphi_o+e'^2\cos^2\varphi_o-9e'^2\sin^2\varphi_o}{6\rho_o N_o^2}x$$

Ἡ ἴδια διαδικασία ἀκολουθεῖται γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ Γεωγραφικοῦ μήκους λ ὁπότε $\Delta\lambda = \lambda-\lambda_o = f(S)$ καί τελικά

$$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_o = \frac{1}{N_o\cos\varphi_o}x + \frac{tg\varphi_o}{No^2\cos\varphi_o}xy + \frac{1+3tg^2\varphi_o+e'^2\cos^2\varphi_o}{3No^3\cos\varphi_o}xy^2 - \frac{tg^2\varphi_o}{3N_o^3\cos\varphi_o}x^3$$

Ἡ σύγκλιση τοῦ μεσημβρινοῦ στή γεωδαιτική ἐπιφάνεια ἀναφορᾶς ὑπολογίζεται μέ τήν ἴδια διαδικασία σάν:

$$\Delta A = S\frac{dA}{dS} + \frac{S^2}{2!}\frac{d^2A}{dS^2} + \dots$$

μέ συνεχεῖς παραγωγήσεις τῆς (4) προκύπτει ὅτι:

$$\Delta A = \frac{tg\varphi_o}{N_o}x + \frac{1+2tg^2\varphi_o+e'^2\cos^2\varphi_o}{2N_o^2}xy + \frac{tg\varphi_o(5+6tg^2\varphi_o+e'^2\cos^2\varphi_o)}{6N_o^3}xy^2 - \frac{tg\varphi_o(1+2tg^2\varphi_o+e'^2\cos^2\varphi_o)}{6N_o^3}x^3 \dots$$

Ἡ γωνία ΔΑ εἶναι ἡ γωνία πού σχηματίζει ὁ μεσημβρινός πού διέρχεται ἀπό τό σημεῖο μέ τήν παράλληλη ἔλλειψη (ἤ κύκλο) πρός τόν μεσημβρινό πού διέρχεται ἀπό τό κέντρο.

Ἡ σύγκλιση γ τοῦ μεσημβρινοῦ στήν προβολή θεωρητικά δέν ταυτίζεται μέ τήν γωνία ΔΑ διότι ἡ προβολή δέν εἶναι σύμμορφη. Ἡ γωνία γ ὑπολογίζεται ἀπό τή σχέση:

$$\gamma = -\arctan\left[\frac{\frac{\partial x}{\partial\varphi}}{\frac{\partial y}{\partial\varphi}}\right]_\varphi$$

Μετά ἀπό ἀνάλυση ἔχουμε:

$$\gamma = \frac{tg\varphi_o}{N_o}x + \frac{2+3tg^2\varphi_o+2e'^2\cos^2\varphi_o}{3N_o^2}xy + \frac{\sin\varphi_o}{3N_o^3\cos^3\varphi_o}(3xy^2-x^3)$$

$$\text{καί} \quad \gamma - \Delta A = \frac{x\,y}{6N_o\rho_o} + \frac{tg\ \varphi_o}{6N_o^{\,2}\rho_o}(xy^2 - x^3) = \frac{1}{6}\cos\varphi_o\Delta\lambda\left(\Delta\varphi - \frac{\sin\varphi_o}{2}\Delta\lambda^2\right) \quad (9)$$

Οἱ σχέσεις πού δίνουν τίς ἐπίπεδες συντεταγμένες x , y ἀπό τίς γεωδαιτικές φ,λ προκύπτουν ἀπό ἀντίστροφες τῶν σχέσεων (6), (7) ὁπότε:

$$x = N_o\cos\varphi_o\Delta\lambda - \rho_o\sin\varphi_o\Delta\lambda\Delta\varphi - \frac{1}{6}\rho_o\cos\varphi_o(2+9e'^2\sin^2\varphi_o)\Delta\lambda\Delta\varphi^2 - \frac{1}{6}N_o\cos\varphi_o\sin^2\varphi_o\Delta\lambda^3 \quad (10)$$

$$y = \rho_o\Delta\varphi + \frac{1}{2}N_o\cos\varphi_o\sin\varphi_o\Delta\lambda^2 + \frac{3}{2N_o}\rho_o^{\,2}e'^2\sin\varphi_o\cos\varphi_o\Delta\varphi^2 + \frac{1}{6}\rho_o(1-4\sin^2\varphi_o + e'^2\cos^4\varphi_o)\Delta\varphi\Delta\lambda^2 \quad (11)$$

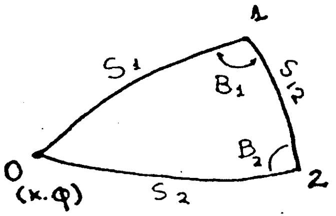
Οἱ συντελεστές τῶν x καί y στίς σχέσεις 6,7,8 ὅπως καί οἱ συν - τελεστές τῶν Δφ καί Δλ στίς (10),(11) εἶναι συναρτήσεις μόνο τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους φ_o τοῦ κέντρου καί εἶναι δυνατό νά ὑπολογισθοῦν εὔκολα γιά ὅλα τά κέντρα μιᾶς χώρας.

Ἔτσι γιά τήν Ἑλλάδα ἔχουν ὑπολογισθεῖ καί πινακοποιηθεῖ οἱ συν- τελεστές γιά πλάτη ἀπό 34°45' ἕως 41°45' καί γιά τό ἐλλειψοειδές τοῦ Bessel (a = 6377397,155m f = 0.003342773).

Στό παράρτημα Α δίνεται τό τυπολόγιο, οἱ πίνακες μέ ὁδηγίες γιά τήν χρήση τους καί οἱ ἀπαραίτητες σχέσεις γιά τίς ἀναγωγές τῶν πλευ- ρῶν καί γωνιῶν.

2.3. Κλίμακα

Από τον ορισμό της προβολής είναι σαφές πως η κλίμακα σε σημείο και η κλίμακα πεπερασμένης απόστασης εξαρτάται από το μήκος της επιβατικής ακτίνας που συνδέει το σημείο με το κέντρο φύλλου (κ.φ.) ΗΑΤΤ που αναφέρονται και από τη γωνία που σχηματίζει το στοιχειώδες ή πεπερασμένο τμήμα με την επιβατική αυτή ακτίνα. Γιά τον υπολογισμό της κλίμακας δίνεται η σχέση :



Σχ.3

$$\kappa_{12}=1+\frac{S_1^2\sin^2 B_1}{6R^2}$$ όπου

$$S_1=s_1=(x_1^2+y_1^2)^{1/2},$$

B_1 = η γωνία στο ελλειψοειδές που αρκεί γιά τον υπολογισμό της μιά προσεγγιστική τιμή και R = μιά μέση ακτίνα γιά την περιοχή.

Στα άκρα ενός φύλλου ΗΑΤΤ όπου $S_1 \simeq 34$Km η μέγιστη κλίμακα γίνεται $\kappa_{12}=1.000005$ που σημαίνει παραμόρφωση 1:200.000. Οπως φαίνεται γιά εργασίες που γίνονται σ'ένα φύλλο ΗΑΤΤ δεν απαιτείται η αναγωγή αυτή γιά αποστάσεις μικρότερες από 1Km.

2.4. Παραμορφώσεις γωνιών

Η παραμόρφωση των γωνιών B_1 ή και B_2 που σχηματίζονται από την πλευρά S_{12} και τις επιβατικές ακτίνες S_1 και S_2 αντίστοιχα δίνεται από τις σχέσεις :

$$\delta B_1^{rad}=\frac{S_1}{6R^2}\sin B_1\,(S_1\cos B_1-2S_{12})$$

$$\delta B_2^{rad}=\frac{S_2}{6R^2}\sin B_2\,(S_2\cos B_2-2S_{12})$$

Η μέγιστη τιμή στα άκρα ενός φύλλου ΗΑΤΤ είναι :

$\delta B'' = 0.058 S_{12}$ όπου S_{12} σε Km.

Είναι σαφές πως η αναγωγή αυτή δεν έχει νόημα στις Τοπογραφικές εργασίες.

2.5. Αλλαγή κέντρου φύλλου

Αν δίνονται οι συντεταγμένες x_1, y_1 ενός σημείου ως προς κ.φ. φ_1, λ_1 και ζητούνται οι x_2, y_2 του ίδιου σημείου ως προς κ.φ. φ_2, λ_2

η πιό σωστή διαδικασία είναι η ακόλουθη :

α. Από τις x_1 ,y_1 και το πλάτος του φ_1 υπολογίζονται οι γεωδαιτικές συντεταγμένες φ,λ του σημείου.

β. Από τις διαφορές $\varphi-\varphi_2$ και $\lambda-\lambda_2$ και το πλάτος φ_2 υπολογίζονται οι συντεταγμένες x_2,y_2 του σημείου ως προς το κέντρο φ_2,λ_2.

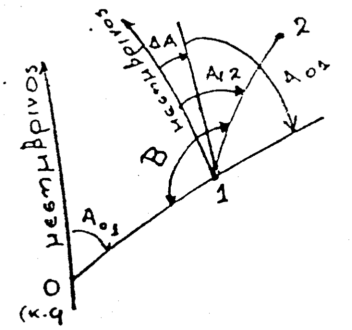
2.6. Υπολογισμοί στη προβολή ΗΑΤΤ

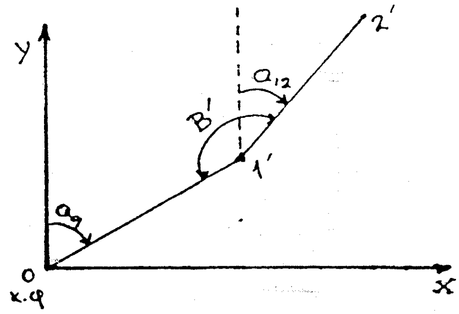
Οπως αναφέρθηκε για Τοπογραφικές εργασίες δεν απαιτείται αναγωγή γωνιών.

Οι αποστάσεις θα πρέπει να ανάγονται εφ'όσον ξεπερνούν το 1Km.

Για εργασίες Τριγωνισμού υψηλής τάξης με κορυφές σε περισσότερα από ένα φύλλα ΗΑΤΤ θα πρέπει να γίνονται και οι αναγωγές γωνιών. Στη συνέχεια δίνεται η διαδικασία γιά δύο ενδεχόμενες περιπτώσεις αλλά θεωρείται προτιμότερο στις περιπτώσεις αυτές να γίνονται οι υπολογισμοί απ'ευθείας στο ελλειψοειδές.

α. Δίνεται η θέση σημείου 1 στη προβολή (x_1,y_1), το Γεωδαιτικό αζιμούθιο A_{12} και η απόσταση S_{12} ανηγμένη στο ελλειψοειδές και ζητείται η θέση του σημείου 2.





Σχ. 4

Απαιτείται η γωνία διεύθυνσης α_{12} και η απόσταση s_{12}

$$\alpha_{12}=\alpha_{01}+180^\circ+B'-360^\circ \quad (\alpha_{01}\equiv A_{01}=\arctan\frac{x_1}{y_1})$$

$$B' = B + \Delta B$$

$$A_{12} = A_{01} + \Delta A + 180^\circ + B - 360^\circ \rightarrow$$

$$B = A_{12} - A_{01} - \Delta A + 180^\circ \rightarrow$$

$$B' = A_{12} - A_{01} - \Delta A + 180^\circ + \Delta B \rightarrow$$

$$\alpha_{12} = \cancel{\alpha_{01}} + \cancel{180^{\circ}} + A_{12} - \cancel{A_{01}} - \Delta A + \cancel{180^{\circ}} + \Delta B - \cancel{360^{\circ}} \rightarrow$$

$$\alpha_{12} = A_{12} - \Delta A + \Delta B$$

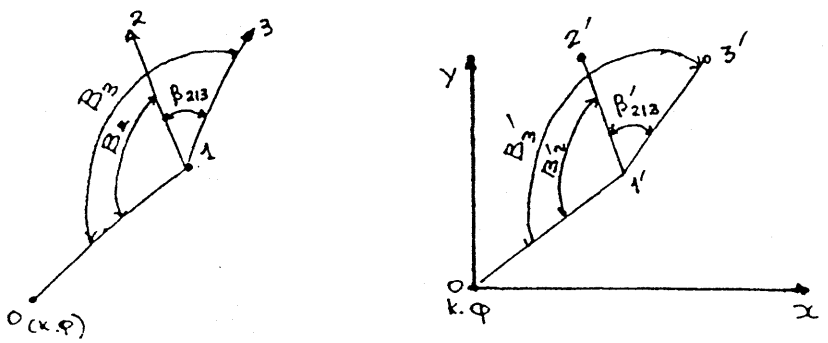
Αρα για τη γωνία διεύθυνσης α_{12} αρκεί ο υπολογισμός της ΔΑ και της ΔΒ.

Ως προς την απόσταση υπολογίζεται η κλίμακα :

$$\varkappa_{12} = 1 + \frac{S_1^2 \sin^2 B}{6R^2} \qquad \text{οπότε} \quad s_{12} = \varkappa_{12}\, S_{12}$$

Ετσι στη συνέχεια εφαρμόζεται το πρώτο θεμελιώδες πρόβλημα.

β.



Σχ.5

Δίνονται οι συντεταγμένες x,y δύο σημείων 1,2 στη προβολή, η μετρημένη γωνία β_{213} και η απόσταση S_{13} (ανηγμένη στο ελλειψοειδές και ζητούνται οι συντεταγμένες του σημείου 3.

Αρκεί να βρεθεί η γωνία β'_{213} στη προβολή και η κλίμακα $\varkappa_{13}$.

Αλλά $\beta'_{213} = \beta_{213} + \Delta B_{13} - \Delta B_{12}$ όπου

$$\Delta B_{12} = \frac{S_{01}}{6R^2} \sin B_{12} \left(S_{01} \cos B_{12} - 2S_{12}\right) \quad \text{και}$$

$$\Delta B_{13} = \frac{S_{01}}{6R^2} \sin B_{13} \left(S_{01} \cos B_{13} - 2S_{13}\right)$$

όπου $S_{01} = s_{01} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ενώ οι γωνίες B_{12} και B_{13} αρκεί να υπολογισθούν από τις σχέσεις: $B_{12} = \alpha_{12} - \alpha_{10}$ και $B_{13} = B_{12} + \beta_{213}$

Ως προς την κλίμακα θα ακολουθηθεί η προηγούμενη διαδικασία.

3. Εγκαρσία Μερκατορική προβολή

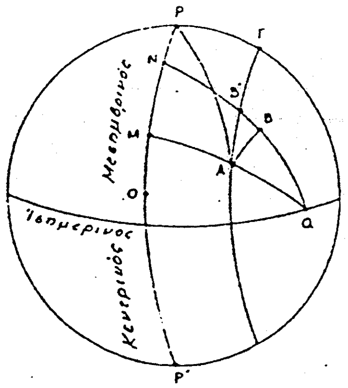
3.1. Γενικά

Ἡ Ἐγκάρσια Μερκατορική προβολή εἶναι μία σύμμορφη κυλινδρική προβολή μέ κύλινδρο πού ἐφάπτεται σέ μεσημβρινό. Ὁ μεσημβρινός ἐπαφῆς ὀνομάζεται <u>κεντρικός μεσημβρινός</u> (κ.μ) καί προβάλλεται μέ κλίμακα ἴση μέ τή μονάδα ἤ τό συντελεστή κλίμακας, ἐνῶ οἱ παραμορφώσεις μεγαλώνουν μέ τήν ἀπόσταση τῶν σημείων ἀπ'αὐτόν.

Ἐδῶ δίνεται ἡ διαδικασία γιά τήν εὕρεση τῶν σχέσεων μεταξύ ἐπιπέδων καί γεωδαιτικῶν συντεταγμένων στό ἐλλειψοειδές ἀκολουθῶντας γεωμετρική μέθοδο, ξεκινώντας ἀπό τήν μή σύμμορφη προβολή τῶν Cassini- Soldner.

Μιά πιό σωστή καί κομψή ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος εἶναι ἐκείνη πού χρησιμοποιεῖ ἀναλυτικές μιγαδικές συναρτήσεις/2/, 10/.

Σέ ὅλες τίς ἐγκάρσιες κυλινδρικές προβολές τό δίκτυο τῶν Γεωδαισιακῶν γραμμῶν ἤ μεγίστων κύκλων (στή σφαῖρα) τῶν καθέτων πρός τόν κεντρικό μεσημβρινό προβάλλεται παράλληλα πρός τόν ἄξονα τῶν τετμημένων ἐνῶ οἱ ἐλλείψεις (ἤ κύκλοι) οἱ παράλληλες πρός τόν κεντρικό μεσημβρινό προβάλλονται παράλληλα πρός τόν ἄξονα τῶν τεταγμένων.



Σχῆμα 6

Ξεκινώντας ἀπό τή σφαῖρα (σχ.6) ἄν PP' εἶναι ὁ κεντρικός μεσημβρινός καί Q ὁ πόλος του (στόν ἰσημερινό) οἱ συντεταγμένες ἑνός σημείου A(φ,λ) στήν προβολή Cassini εἶναι:

x_c = τόξ AM = μῆκος μεγίστου κύκλου καθέτου πρός τόν κ.μ.
y_c = τοξ OM = μῆκος τόξου μεσημβρινοῦ ἀπό τήν ἀρχή O ($\varphi = o$ ἤ φ_o) μέχρι τό σημεῖο πού ὁ μέγιστος κύκλος τέμνει τόν κ.μ.

εἶναι προφανές ὅτι οἱ κλίμακες $\kappa_x = 1$ ἐνῶ $\kappa_y = \dfrac{1}{\cos\frac{x_c}{R}}$

Ἄν τώρα ἡ κλίμακα τῶν τετμημένων μεγαλώσει στήν ἴδια ἀναλογία μέ τήν κλίμακα τῶν τεταγμένων ἔχουμε τήν σύμμορφη ἐγκάρσια Μερκατορική προβολή (ε.μ.π).

3.2. Σχέση μεταξύ συντεταγμένων Cassini καί 'Εγκαρσίας Μερκατορικής Προβολής

'Η προβολή Cassini μετατρέπεται στήν σύμμορφη ε.μ.π. διατηρώντας τίς ἴδιες τεταγμένες ὁπότε $y = y_c$ καί μεταβάλλοντας τήν κλίμακα τῶν τετμημένων ὥστε νά γίνει ἴση μέ τήν κλίμακα τῶν τεταγμένων. Θά πρέπει:

$$dx = \frac{dx_c}{\cos \frac{x_c}{R}} \qquad \text{ή}$$

$$x = \int_0^{x_c} dx/\cos \frac{x_c}{R} \qquad \text{ή}$$

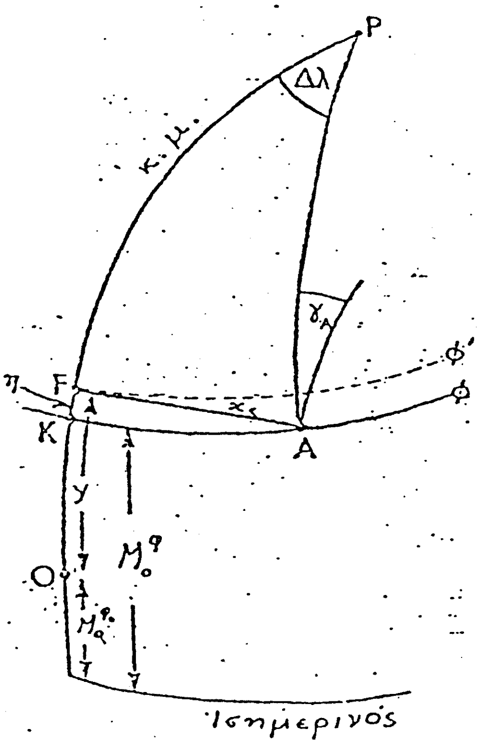
$$x = \int_0^{x_c} \left(1 + \frac{x_c^2}{2R^2} + \frac{5x_c^4}{24R^4} + \ldots\right) dx_c$$

ὁπότε: $$x = x_c + \frac{x_c^3}{6R^2} + \frac{x_c^5}{24R^4} + \ldots (1)$$

'Αντιστρέφοντας τήν (1) προκύπτει:

$$x_c = x - \frac{x^3}{6R^2} + \frac{x^5}{24R^4} + \ldots (2)$$

3.3. Μετατροπή τῶν φ,λ σέ x,y



Σχήμα 7

Ἄν A εἶναι σημεῖο τοῦ ἐλλειψοειδοῦς (σχ.7) κοντά στόν κ.μ. μέ πλάτος φ καί μῆκος ἀπό αὐτόν Δλ , θά εἶναι:

$$y = M_{\varphi_o}^{\varphi} + n$$

$$x_c = \text{arc } AF$$

ὅπου: $M_{\varphi_o}^{\varphi} = \int_{\varphi_o}^{\varphi} \rho d\varphi$ τόξο μεσημβρινοῦ ΟΚ ἀπό τήν ἀρχή μέχρι τό πλάτος φ τοῦ σημείου A.

n = τό μικρό τόξο μεσημβρινοῦ ἀπό πλάτος φ ὡς φ' πού ἀντιστοιχεῖ στήν τομή F τοῦ κ. μ. καί τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς τῆς κάθετης ἀπό τό A.

Τό τόξο $M_{\varphi_o}^{\varphi}$ ὑπολογίζεται σά συνάρτηση τοῦ πλάτους φ καί ἔτσι πινακοποιεῖται.

Γιά τήν εὕρεση τῶν x_c καί n στό ἐλλειψοειδές προσεγγίζουμε τό ἐλλειψοειδές μέ σφαῖρα ἀκτίνας Ν πού ἀντιστοιχεῖ σέ πλάτος φ. (Τά σφάλματα ἀπ'αὐτή τήν παραδοχή θεωροῦνται ἀμελητέα).

Ἀπό τό σφαιρικό ὀρθογώνιο τρίγωνο PFA προκύπτει:

$$\sin\frac{x_c}{N} = \sin\Delta\lambda\cos\varphi = \cos\varphi\ (\Delta\lambda - \frac{\Delta\lambda^3}{6} + \frac{\Delta\lambda^5}{120} - \ldots)$$

καί ἐκφράζοντας τή γωνία $\frac{x_c}{N}$ σάν συνάρτηση τοῦ $\sin\frac{x_c}{N}$

$$\frac{x_c}{N} = \sin\frac{x_c}{N} + \frac{1}{6}\sin^3\frac{x_c}{N} + \ldots$$

ἔχουμε:

$$x_c = N\cos\varphi\Delta\lambda - \frac{N}{6}\cos^3\varphi\, tg^2\varphi\Delta\lambda^3 + \ldots \qquad (3)$$

Ἀντικαθιστώντας τήν τιμή τῆς x_c στήν (1) καί θεωρόντας $R = \sqrt{\rho_\varphi N_\varphi}$ ἔχουμε:

$$x = N\cos\varphi\Delta\lambda + \frac{1}{6}N\cos^3\varphi(1 - tg^2\varphi + e'^2\cos^2\varphi)\Delta\lambda^3 + \ldots \qquad (4)$$

Γιά τόν ὑπολογισμό τοῦ n ἔχουμε:

$$\cos(90-\varphi) = \cos(90-\varphi-\frac{n}{N})\cos\frac{x_c}{N_\varphi}$$

ἤ

$$\sin(\varphi+\frac{n}{N}) = \sin\varphi\sec\frac{x_c}{N}$$

ἤ

$$\sin\varphi\cos\frac{n}{N} + \sin\frac{n}{N}\cos\varphi = \sin\varphi\ (1 + \frac{x_c^2}{2N^2} + \frac{5x^4}{24N^4} + \ldots)$$

$$\sin\varphi(1 - \frac{n^2}{2N^2} + \ldots) + \cos\varphi(\frac{n}{N} - \frac{n^3}{6N^3} + \ldots) = \sin\varphi(1 + \frac{x_c^2}{2N^2} + \frac{5x^4}{24N^4} + \ldots) \quad ἤ$$

$$\frac{n}{N}\cos\varphi - \frac{n^2}{2N^2}\sin\varphi - \frac{n^3}{6N^3}\cos\varphi + \ldots = \sin\varphi\frac{x_c^2}{2N^2} + \sin\varphi\frac{5x_c^4}{24N^4} + \ldots$$

σέ πρώτη προσέγγιση $\frac{n}{N} = \frac{x_c^2}{2N^2}tg\varphi$ ὁπότε

$$n= \frac{x_c^2}{2N} tg\ \varphi + \frac{5x_c^4}{24N^3} tg\varphi + \frac{61x_c^6}{720N^5} tg\varphi + \frac{x_c^4}{8N^3} tg^3\varphi + \frac{x_c^6}{48N^5} tg^3\varphi$$

καί ἀντικαθιστώντας τήν τιμή τῆς x_c ἀπό τήν (2) ἔχουμε:

$$n= \frac{N}{2} \cos^2\varphi tg\varphi\Delta\lambda^2 + \frac{N}{24} \cos^4\varphi tg\varphi(5- tg^2\varphi\ 9e'^2\cos^2\varphi + 4e'^4\cos^4\varphi)\Delta\lambda^4$$

ὁπότε

$$y= M_{\varphi_o}^{\varphi} + \frac{N}{2} \cos^2\varphi tg\ \varphi\Delta\lambda^2 + \frac{N}{24} \cos^4\varphi\ tg\varphi(5-tg^2\varphi- 9e'^2\cos^2\varphi+4e'^4\cos^4\varphi)$$

$$+ \ldots$$

3.4. Μετατροπή τῶν συντεταγμένων x, y σέ φ,λ.

Τό πλάτος φ δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\varphi = \varphi' - \delta\varphi$$

Ὅπως ἤδη ἀναφέρθηκε τό πλάτος φ' εἶναι τό πλάτος πού ἀντιστοιχεῖ στό σημεῖο τομῆς τοῦ κ.μ. μέ τήν γεωδαισιακή γραμμή (ἤ μέγιστο κύκλο) τήν κάθετη ἀπό τό Α πρός αὐτόν. Εἶναι δηλαδή τό πλάτος πού ἀντιστοιχεῖ σέ τόξο μεσημβρινοῦ ἴσο μέ y.

$$\left(y= M_{\varphi_o}^{\varphi'} = \int_{\varphi_o}^{\varphi'} \rho\ d\varphi \right)$$

Ξεκινᾶμε πάλι ἀπό τήν προβολή Cassini ἀλλά σέ σφαῖρα ἀκτίνας N' (ἀκτίνα πού ἀντιστοιχεῖ σέ πλάτος φ'). Ἀπό τό σφαιρικό ὀρθογώνιο τρίγωνο PAF σχ.(2)

$$\cos(90-\varphi' + \delta\varphi) = \cos(90-\varphi') \cos \frac{x_c}{N'} \qquad \text{ἤ}$$

$$\sin(\varphi'-\delta\varphi) = \sin \varphi' \cos \frac{x_c}{N'}$$

Ἀκολουθώντας τήν προηγούμενη διαδικασία ἔχουμε:

$$\delta\varphi = \frac{tg\ \varphi'}{2N'^2} x_c^2 + \frac{tg\varphi'}{24N'^4} x_c^4 (1+3tg^2\varphi') + \cdots$$

Γιά νά ἐκφράζει ἡ γωνία δφ γωνία στό ἐπίπεδο τοῦ Μεσημβρινοῦ μιά καί ἡ δφ εἶναι μικρή, σάν μέση ἀκτίνα τοῦ μεσημβρινοῦ ἀπό φ ὡς φ' θεωρεῖται ἡ ρ' (ἀκτίνα μεσημβρινοῦ γιά πλάτος φ'), ὁπότε:

$$\delta\varphi = \frac{tg\,\varphi'}{2\rho'\ N'}\ x_c^{\,2} - \frac{tg\varphi'(1+3\ tg^2\varphi')}{24\ \rho'\ N'^3}\ x_c^{\,4} + \ldots$$

καί ἀντικαθιστώντας τήν x_c μέ x ἀπό τήν (2) καταλήγουμε:

$$\varphi = \varphi' - \frac{tg\ \varphi'}{2\ \rho'\ \ N'}\ x^2 + \frac{tg\varphi'(5+3tg^2\varphi)}{24\rho'\ \ N'^3}\ x^4 + \ldots \qquad (6)$$

'Από τό σφαιρικό ὀρθογώνιο τρίγωνο PAF ἔχουμε:

$$\sin\Delta\lambda = \frac{\sin\frac{x_c}{N'}}{\sin(90-(\varphi'-\delta\varphi))} = \sin\frac{x_c}{N'}\ \sec\ (\varphi'-\delta\varphi)$$

ἤ $$\sin\Delta\lambda = \sin\frac{x_c}{N'}\ \left(\sec\ \varphi'-\delta\varphi\ \sec\varphi'\ tg\varphi' + \frac{\delta\varphi^2}{2}\ \sec\ \varphi'\ (1+2tg^2\varphi')\right)$$

ἤ $$\sin\Delta\lambda = \left\{\frac{x_c}{N'} - \frac{x_c^{\,3}}{6N'^3} + \frac{x_c^{\,5}}{120N'^5} - \ldots\right\}.\left\{\sec\ \varphi' - \frac{x_c^{\,2}}{2N^2}\ \sec\ \varphi' tg^2\varphi' + \right\}$$

καί μετά ἀπό ἔκφραση τοῦ Δλ σέ σειρά τοῦ sin Δλ θά ἔχουμε:

$$\Delta\lambda = \frac{x_c}{N'}\ \sec\ \ \varphi' - \frac{x_c^{\,3}}{3N'^3}\ \sec\ \varphi'\ tg\ \varphi' + \ldots$$

'Αντικαθιστώντας τήν τιμή τῆς x_c ἀπό τή σχέση (2) καταλήγουμε:

$$\Delta\lambda = \frac{x}{N'\cos\varphi'} - \frac{(1+2\ tg^2\varphi'+e'^2\cos^2\varphi'}{6N^3\cos\varphi'}\ x^3 + \ldots \qquad (7)$$

3.5. Σύγκλιση τοῦ μεσημβρινοῦ

Ἡ σύγκλιση τοῦ μεσημβρινοῦ δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$tg\gamma = -\frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}}{\frac{\partial y}{\partial \varphi}}$$

ἐπειδή ὅμως ἡ ε.μ.π. εἶναι σύμμορφη ἡ γωνία γ πού εἶναι ἡ γωνία μεταξύ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ μεσημβρινοῦ καί τῆς παράλληλης εὐθείας πρός τόν ἄξονα τῶν τεταγμένων εἶναι ἴση μέ τή γωνία μεταξύ τῆς ἐφαπτομένης τοῦ παραλλήλου καί τῆς παράλληλης εὐθείας πρός τόν ἄξονα τῶν τετμημένων ἔτσι

$$tg\gamma = \frac{\frac{\partial y}{\partial \lambda}}{\frac{\partial x}{\partial \lambda}}$$

3.5.1. Σύγκλιση γ σάν συνάρτηση τῶν φ,λ

Ἀπό τίς σχέσεις (5) καί (4) ἔχουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} = N\cos\varphi\sin\varphi\Delta\lambda + \frac{N}{6}\cos^4\varphi tg\varphi\ (5-tg^2\varphi+9e'^2\cos^2\varphi+4e'^4\cos^4\varphi)\Delta\lambda^3$$

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = N\cos\varphi + \frac{1}{2}N\cos^3\varphi\ (1-tg^2\varphi+e'^2\cos^2\varphi)\Delta\lambda^2$$

καί διαιρώντας προκύπτει:

$$tg\gamma = \sin\varphi\Delta\lambda + \frac{1}{3}\sin\varphi\cos^2\varphi(1-tg^2\varphi+3e'^2\cos^2\varphi+2e'^4\cos^4\varphi) + \ldots$$

Ἐκφράζοντας τήν γ σάν:

$$\gamma = tg\,\gamma - \frac{1}{3}tg^3\gamma + \frac{1}{5}tg^5\gamma$$

μετά ἀπό ἀντικατάσταση ἔχουμε:

$$\gamma = \sin\varphi\Delta\lambda + \sin\varphi\cos^2\varphi(1+3e'^2\cos^2\varphi+2e'^4\cos^4\varphi)\frac{\Delta\lambda^3}{3} + \ldots \quad (8)$$

3.5.2. Σύγκλιση γ σάν συνάρτηση τῶν x καί y

Στή σχέση 8 ἐκφράζονται τά Δλ, sinφ,cos²φ σάν συναρτήσεις τῶν x καί φ' ἀπό τίς σχέσεις 6 καί 7 ὁπότε:

$$\gamma = \frac{x}{N'}tg\varphi' - \frac{x^3}{3N'^3}tg\,\varphi'\ (1+tg\varphi' - e'^2\cos^2\varphi') + \ldots(9)$$

3.6. Κλίμακα σέ σημεῖο

Ἡ κλίμακα σέ σημεῖο δίνεται ἀπό τή σχέση,

$$\varkappa = \frac{ds}{dS} = \frac{1}{\cos\frac{x_c}{R}}$$ ἤ

$$\varkappa = 1 + \frac{x_c^2}{2R^2} + \frac{x_c^4}{24R^4} + \qquad (10)$$

3.6.1. Ἔκφραση τῆς κλίμακας ἀπό γεωδ. συντεταγμένες

Στή σχέση (10) ἀντικαθίσταται ἡ τιμή τῆς x_c ἀπό τήν (3) ὁπότε:

$$\varkappa = 1 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi(1+e'^2\cos^2\varphi)\Delta\lambda^2 + \ldots \qquad (11)$$

3.6.2. Ἔκφραση τῆς κλίμακας ἀπό ἐπίπεδες συντεταγμένες

Στή σχέση (10) ἡ τιμή τῆς x_c ἀντικαθίσταται ἀπό τή σχέση (2) μέ $R = \rho' N'$, ὁπότε:

$$\varkappa = 1 + \frac{x^2}{2N'\rho'} + \frac{x^4}{24N'^2\rho'^2} + \qquad (12)$$

3.7. Κλίμακα πεπερασμένης ἀπόστασης S_{12}

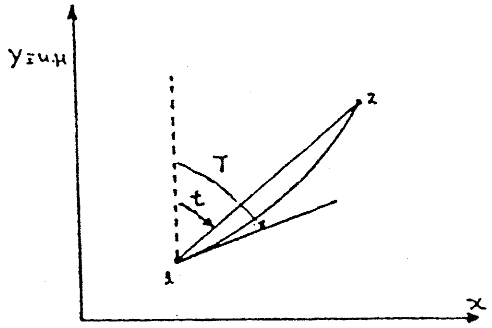
Ἡ κίμακα K_{12} δίνεται ἀπό τή σχέση

$$\varkappa_{12} = 1 + \left(\frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{6N\rho}\right)\left(1 + \frac{x_1^2+x_1x_2+x_2^2)}{36N\rho}\right) \qquad (13)$$

Ἐδῶ οἱ ἀκτῖνες καμπυλότητας ἔχουν ληφθεῖ στό μέσο τῆς S_{12}.

3.8. Διορθωση διευθύνσεων ἀπό τόξο σέ χορδή

Ἡ διόρθωση αὐτή δίνει τή διαφορά δ_{12} τῆς γωνίας διευθύνσεως μεταξύ τῆς προβολῆς τῆς ἐφαπτομένης τῆς γεωδαισιακῆς γραμμῆς στό σημεῖο 1 καί τῆς χορδῆς 1-2 σχ (3).



σχ.8

Ἄν T εἶναι ἡ γωνία διευθύνσεως τῆς ἐφαπτομένης στή γεωδαισιακή γραμμή στό 1 καί t ἡ γωνία διευθύνσεως τῆς χορδῆς 12 τότε δ_{12} = t−T καί δίνεται ἀπό τή σχέση:

$$\delta_{12} = \frac{(y_1 - y_2)\,(2x_1 + x_2)}{6N\rho}\left(1 - \frac{(2x_1 + x_2)^2}{27N\rho}\right) \qquad (14)$$

ὅπου οἱ ἀκτῖνες καμπυλότητας θεωροῦνται στό 1/3 τῆς S_{12} σάν συνάρτηση τῶν φ'.

Ἐπειδή ἡ γεωδαισιακή γραμμή προβάλλεται πάντα μέ τά κοῖλα πρός τόν κ.μ. ἡ διόρθωση δ_{12} ἀλλάζει πρόσημο ἀνάλογα μέ τή θέση τῶν 1 καί 2 ὡς πρός τόν κ.μ.

3.9. Ἐφαρμογή τῆς Ἐγκαρσίας Μερκατορικῆς προβολῆς

Ὅλες οἱ σχέσεις πού δόθηκαν εἶναι πολυώνυμα πού οἱ ὅροι τους ἀποτελοῦνται ἀπό συναρτήσεις τοῦ πλάτους ἐπί κάποια δύναμη τῆς διαφορᾶς Δλ ἀπό τόν κεντρικό μεσημβρινό ἤ ἐπί κάποια δύναμη τῆς συνιστώσας x.

Ἔτσι ὅλοι οἱ συντελεστές (συναρτήσεις τοῦ πλάτους) πινακοποιοῦνται γιά τά πλάτη πού ἐνδιαφέρουν, συνήθως κάθε 1',δίνοντας καί τιμές τοῦ δευτερολέπτου.

Ὁ πρῶτος ὅρος τῆς σχέσης y =f(φ,λ) δίνει τό τόξο τοῦ μεσημβρινοῦ ἀπό τόν ἰσημερινό ἤ κάποια ἀρχή φ_o. Ἔτσι γιά τήν εὕρεση τοῦ πλάτους φ',πού χρησιμοποιεῖται σάν στοιχεῖο εἰσόδου στούς πίνακες πού ἀναφέρονται στίς περιπτώσεις πού εἶναι γνωστές οἱ συντεταγμένες στήν προβολή, γίνεται ἀντίστροφη παρεμβολή στόν πίνακα πού δίνει τό τόξο μεσημβρινοῦ.

Οἱ παραμορφώσεις αὐξάνονται ὅσο ἀπομακρύνονται τά σημεῖα ἀπό τόν κ.μ. Γιά τήν διατήρηση τῶν παραμορφώσεων στά ἐπιθυμητά ὅρια, περιοχές πού διαφέρουν σέ Δλ τόσο ὥστε οἱ παραμορφώσεις νά ξεπερνοῦν τά ὅρια, χωρίζονται σέ ζῶνες καί κάθε ζώνη προβάλεται ὡς πρός τόν κ.μ. πού διέρχεται ἀπό τό μέσο της.

Συχνά γιά τή μείωση τῶν παραμορφώσεων μέσα στή ζώνη χρησιμοποιεῖται κατάλληλος συντελεστής κλίμακας K_o πού ἡ τιμή του ἐξαρτᾶται ἀπό τό ἐπιδιωκόμενο μέγεθος τῆς μέγιστης παραμόρφωσης μέσα στή ζώνη.

'Ακόμη γιά τήν άποφυγή άρνητικῶν τετμημένων προστίθεται στά x μιά σταθερή ποσότητα άνάλογη μέ τό μέγεθος τῆς ζώνης όπότε ή τετμημένη τοῦ κεντρικοῦ μεσημβρινοῦ άντί γιά x =0 παίρνει τήν τιμή τῆς σταθερῆς ποσότητας.

3. 10. Συστήματα 'Εγκαρσίας Μερκατορικῆς προβολῆς πού χρησιμοποιοῦνται στήν 'Ελλάδα

Στήν 'Ελλάδα ή Γ.Υ.Σ. χρησιμοποιεῖ τήν 'Εγκαρσία Μερκατορική Προβολή σύμφωνα μέ τό σύστημα U.T.M. (Universal Transverse Mercator) ένῶ τό 'Υπουργεῖο Δημοσίων 'Εργων έχει υίοθετήσει τό σύστημα μέ ζῶνες τῶν 3^o.

Το 1987 προτάθηκε από τον καθηγητή Γ.Βέη, πρόεδρο Ο.Κ.Χ.Ε. ένα νέο Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς το Ε.Γ.Σ.Α. 87 που χρησιμοποιεί κι αυτό Εγκάρσια Μερκατορική προβολή με μιά ζώνη για όλη τη χώρα.

3. 10.1. Σύστημα U.T.M.

Τό σύστημα αύτό έχει υίοθετηθεῖ άπό τίς περισσότερες χῶρες γιά στρατιωτικούς κυρίως σκοπούς.

'Εχει χωριστεῖ ή Γῆ σέ 60 ζῶνες. 'Ετσι κάθε ζώνη καλύπτει 6^o γεωγραφικοῦ μήκους καί ή μεγίστη διαφορά $\lambda-\lambda_o$ τῶν σημείων άπό τούς κ.μ. εἶναι 3^o. 'Η πρώτη ζώνη ξεκινᾶ άπό τόν μεσημβρινό τοῦ Greenwich μέ κ.μ. σέ $\lambda=3^o$A ή 177^oΔ.

'Η 'Ελλάδα έκτείνεται άπό $\lambda \cong 19^o$ έως $\lambda \cong 28^o$ πράγμα πού σημαίνει πώς ή χώρα προβάλλεται στήν 4η καί 5η ζώνη τοῦ συστήματος U.T.M. μέ κ.μ. σέ $\lambda_o=21^o$ καί $\lambda_o= 27^o$.

Τό σύστημα U.T.M. χρησιμοποιεῖ συντελεστή κλίμακας K_o=0.9996 όπότε οί παραμορφώσεις στήν κλίμακα μέσα σέ κάθε ζώνη στά 'Ελληνικά πλάτη δέν ξεπερνοῦν τό 1:2.500.

Οί τετμημένες τῶν κεντρικῶν μεσημβρινῶν έχουν τήν τιμή 500000m καί ώς άρχή τῶν τεταγμένων θεωρεῖται ή τομή τοῦ ίσημερινοῦ μέ τούς κ.μ. Οί πίνακες έχουν ύπολογισθεῖ ώς πρός τό Διεθνές έλλειψοειδές τοῦ Hayfford (Τό ίδιο έλλειψοειδές χρησιμοποιεῖται στό Εύρωπαϊκό Γεωδαιτικό σύστημα άναφορᾶς ED 50 , European Datum).

Στό παράρτημα Β δίνονται οί σχέσεις όπως χρησιμοποιοῦνται στό σύστημα U.T.M. όπως καί ύποδείγματα πινάκων γιά τά πλάτη άπό 38^o÷ 39^o.

3. 10.2. Σύστημα 3^o μοιρῶν

Θεωροῦνται ζῶνες 3^o όπότε τά άκρα τῆς κάθε ζώνης διαφέρουν $1,5^o$ άπό τόν κ.μ.

Χρησιμοποιεῖται συντελεστής κλίμακας K_o=0.9999 καί οί παραμορφώσεις δέν ξεπερνοῦν τό 1:10.000.

Ἔχουν θεωρηθεῖ 3 ζῶνες γιά τήν Ἑλλάδα. Ὁ κ.μ. τῆς μεσαίας ζώνης ταυτίζεται μέ τόν μεσημβρινό τοῦ Ἀστεροσκοπείου Ἀθηνῶν πού θεω - ρεῖται μέ $\lambda_o=0^o$ ἐνῶ οἱ ἄλλοι μέ τούς μεσημβρινούς $\lambda_o=-3^o$, $\lambda_o=3^o$. Γιά νά ἀποφευχθοῦν ἀρνητικές τετμημένες οἱ κεντρικοί μεσημβρινοί ἔχουν τετμημένη 200.000 m. Σάν ἀρχή τῶν τεταγμένων θεωρεῖται ἡ το-μή τῶν κεντρικῶν μεσημβρινῶν μέ τόν παράλληλο $\varphi_o=34^o$.

Οἱ ὑπολογισμοί γιά τήν σύνταξη τῶν πινάκων ἔχουν γίνει στό Ἐλ-λειψοειδές τοῦ Bessel (Αὐτό τό ἐλλειψοειδές χρησιμοποιεῖται σάν Γεω-δαιτική ἐπιφάνεια ἀναφορᾶς ἀπό τίς πολιτικές ὑπηρεσίες τῆς χώρας).

Στό παράρτημα Β δίνονται οἱ σχέσεις ὅπως χρησιμοποιοῦνται γιά τό σύστημα αὐτό ὅπως καί ὑποδείγματα πινάκων γιά πλάτη ἀπό 38^o ἕως $38^o30'$.

3.10.3. Ελληνικό Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς 87 (ΕΓΣΑ 87)

Θεωρείται μια ζώνη για όλη τη χώρα με κεντρικό μεσημβρινό $\lambda_o=24^o$, χρησιμοποιείται συντελεστής κλίμακας $K_o=0.9996$ και οι παραμορφώσεις στα άκρα της χώρας μπορούν να φθάσουν 1:1000.

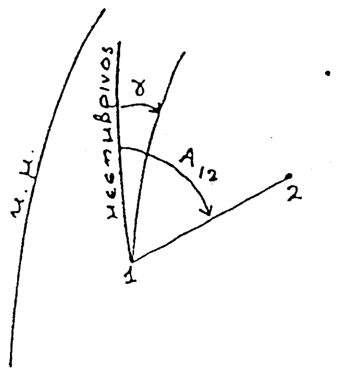
Ο κ.μ. έχει τετμημένη 500.000 m και σαν αρχή τεταγμένων θεωρεί-ται η τομή του Ισημερινού με τον κ.μ.

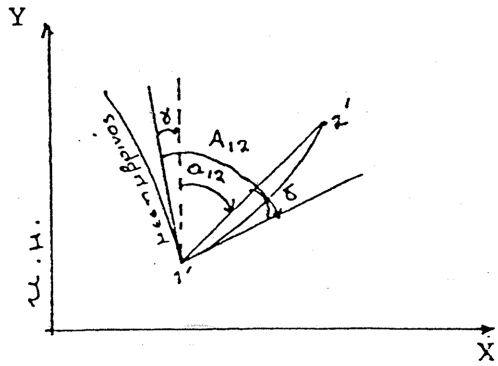
Το σύστημα αυτό εντάσσεται στο Ε.Γ.Σ.Α. 87 (Νέο Datum) που ορί-ζεται με το ελλειψοειδές αναφοράς GRS80 (a=637 8137 , f=1/298,2572236) προσαρμοσμένο στο βάθρο του Διονύσου.

3.11. Υπολογισμοί στην Ε.Μ.Π.

Δίνεται η θέση σημείου 1 στη προβολή (X_1, Y_1), το Γεωδαιτικό αζιμούθιο A_{12} και η απόσταση S_{12} ανηγμένη στο ελλειψοειδές και ζητείται η θέση του σημείου 2

Απαιτείται η γωνία διεύθυνσης α_{12} και η απόσταση s_{12} στη προβολή.





$$\alpha_{12} = A_{12} - \gamma + \delta_{12}$$

Η σύγκλιση του μεσημβρινού γ υπολογίζεται συναρτήσει της θέσης του σημείου 1 από τους πίνακες ή και προγραμματίζοντας την αντίστοιχη σχέση σε υπολογιστή η δε γωνία δ_{12} που εξαρτάται από τις θέσεις και των δύο άκρων με την ίδια διαδικασία αφού βρεθεί προσεγγιστικά η θέση του σημείου 2.

Ενδεικτικά αναφέρεται ότι στο σύστημα 3^{o} η διόρθωση δ_{12} φθάνει το 1"ή3^{cc}γιά αποστάσεις 2Km στα άκρα μιάς ζώνης. Ετσι γιά τρέχουσες Τοπογραφικές εργασίες όπου οι πλευρές δεν ξεπερνούν τα 2Km μπορεί να αγνοείται.

Ως προς τις αναγωγές των αποστάσεων θα πρέπει <u>οπωσδήποτε</u> να γίνονται διότι οι παραμορφώσεις φθάνουν το 1:10.000 στο σύστημα των 3^{o} ενώ στο ΕΓΣΑ 87 το 1:1.000.

Αν η διαφορά των τετμημένων της γραμμής είναι $\Delta X_{12} > 1000$m θα πρέπει να εφαρμόζεται σχέση για πεπερασμένη απόσταση, ενώ αν $\Delta X_{12} < 1000$ αρκεί η κλίμακα σε σημείο.

Στην περίπτωση που αντί γιά Γεωδαιτικό αζιμούθιο δίνονται οι θέσεις δύο κορυφών 1,2 στην προβολή και η γωνία 213 τότε αρκεί στη γωνία να προστεθεί η διαφορά $\delta_{13} - \delta_{12}$ και να εφαρμοσθεί το 1ο θεμελιώδες πρόβλημα.

Οι σχέσεις που δίνονται μπορεί κατά περίπτωση να απλουστευθούν. Ετσι, αν για παράδειγμα δεν απαιτείται ακρίβεια μεγαλύτερη από 2 ppm αρκεί η κλίμακα να υπολογιστεί από τη σχέση:

$$K = K_o + 0.012311\ (X-X_o)^2$$

θεωρώντας τα X και X_o (τετμημένη κ.μ.) σε Mm (Μεγάμετρα) που σημαίνει πολ/μό των X και X_o με 10^{-6}. Εφ'όσον η απόσταση θεωρείται σαν πεπερασμένη θεωρώντας $X = \frac{X_1+X_2}{2}$.

Ως προς την αναγωγή δ_{12} των γωνιών μπορεί αντίστοιχα να υπολογισθεί από τη σχέση:

$$\delta_{12} = 7{,}^{cc}833\ (Y_1-Y_2)\ (X - X_o)$$

θεωρώντας τις τετμημένες σε Mm και τις τεταγμένες σε Km.

3.12. Αλλαγές προβολικών συστημάτων

Αν δίνονται οι επίπεδες συντεταγμένες X_I, Y_I στο προβολικό σύστημα I και ζητούνται οι αντίστοιχες X_{II}, Y_{II} στο σύστημα II εφ'όσον οι επίπεδες συντεταγμένες των δύο συστηματών αναφέρονται στο ίδιο Datum (Γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς) μετατρέπονται με τις σχέσεις του συστήματος οι X_I, Y_I σε φ,λ και στη συνέχεια οι φ,λ σε X_{II}, Y_{II} με τις σχέσεις του συστήματος II

Αν όμως διαφέρουν τα Datums των δύο συστημάτων μετατρέπονται οι X_I,Y_I σε φ_I, λ_I στο Datum I, οι φ_I , λ_I σε φ_{II}, λ_{II} στο Datum II εφ'όσον φυσικά δίνονται οι παράμετρες μετασχηματισμού, και τέλος υπολογίζονται οι X_{II}, Y_{II} στο σύστημα II.

Στην πρώτη περίπτωση υπάγονται μετατροπές από HATT σε ε.μ.π. 3^o και αντίστροφα ενώ στη δεύτερη όλες οι άλλες περιπτώσεις.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1/ Α.Μ.Αγατζά-Μπαλοδήμου: "A map projection for Greece" Msc. Thesis, University of Oxford, 1971

2/ Α.Μ. Αγατζά-Μπαλοδήμου : "Εν προβολικόν σύστημα διά την Ελλάδα", Τεχνικά Χρονικά, Οκτώβριος 1973.

3/ Α.Μ. Αγατζά-Μπαλοδήμου "Τα Προβολικά Συστήματα που χρησιμοποιούνται στην Ελλάδα σήμερα" Σεμινάριο Πανελλήνιου Συλλόγου Αγρονόμων και Τοπογράφων Μηχανικών, Μάρτιος 1985

4/ Γ. Βέης: Το Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα αναφοράς" Εκδοση Ο.Κ.Χ.Ε., Δεκέμβριος 1987

5/ Bomford G.: "Geodesy" 2nd Edition, Clarendon Press

6/ Bomford G.: "Geodesy" 3rd Edition, Clarendon Press

7/ Clark D., and Clendining J.: "Plane and Geodetic Surveying" Vol. 2 5th Edition (1968)

8/ Εργαστήριο Ανώτερης Γεωδαισίας και Χαρτογραφίας "Ειδικά θέματα Χαρτογραφίας - Στοιχεία μαθηματικής Χαρτογραφίας" Αθήνα, 1977.

9/ Hotine M.: "The Orthomorphic projections of the Spheroid" Empire Survey review, Nos 62,63,64,65,67 (1946-1947)

10/ Μπαντέκας Ι. "Η αζιμουθιακή ισαπέχουσα προβολή του Hatt" Τεχνικά Χρονικά 1963.

11/ Thomas P.P. "Conformal projections in Geodesy and Cartography". U.S. Coast and Geodetic Survey, Special Publication No 251.

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α   Α

Τυπολόγιο καί πίνακες προβολῆς ΗΑΤΤ

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΑΖΙΜΟΥΘΙΑΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ ΗΑΤΤ

1) Μετατροπή Γεωγραφικῶν συντεταγμένων (φ,λ) σέ ἐπίπεδες καρτεσιανές συντεταγμένες Hatt (x,y).

$$x = N_0 \cos\varphi_0 \Delta\lambda - \rho_0 \sin\varphi_0 \Delta\lambda \Delta\varphi - \frac{1}{6} \rho_0 \cos\varphi_0 (2 + 9e'^2 \sin^2\varphi_0) \Delta\lambda \Delta\varphi^2 - \frac{1}{6} N_0 \cos\varphi_0 \sin^2\varphi_0 \Delta\lambda^3$$

$$y = \rho_0 \Delta\varphi + \frac{1}{2} N_0 \cos\varphi_0 \sin\varphi_0 \Delta\lambda^2 + \frac{3}{2N_0} \rho_0^2 e'^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0 \Delta\varphi^2 + \frac{1}{6} \rho_0 (1 - 4\sin^2\varphi_0 + e'^2 \cos^4\varphi_0) \Delta\varphi \Delta\lambda^2$$

ή

$$x = d_1 \Delta\lambda + d_2 \Delta\lambda \Delta\varphi + d_3 \Delta\lambda \Delta\varphi^2 + d_4 \Delta\lambda^3$$

$$y = c_1 \Delta\varphi + c_2 \Delta\lambda^2 + c_3 \Delta\varphi^2 + c_4 \Delta\varphi \Delta\lambda^2$$

Οἱ συντελεστές $d_1, d_2, d_3, d_4, c_1, c_2, c_3, c_4$ γιά τό ἐλλειψοειδές τοῦ Bessel λαμβάνονται ἀπό τόν Πίνακα (Α) μέ στοιχεῖο εἰσόδου τό πλάτος φ_0 τοῦ κέντρου τοῦ φύλλου.

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda'' \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\varphi = \Delta\varphi'' \cdot 10^{-3}$$

Τά ἀποτελέσματα σέ μέτρα.

2) Μετατροπή ἐπιπέδων καρτεσιανῶν συντεταγμένων Hatt (x,y) σέ γεωγραφικές (φ,λ).

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = \frac{1}{\rho_0} y - \frac{tg\varphi_0}{2\rho_0 N_0} x^2 - \frac{3e'^2 tg\varphi_0 \cos^2\varphi_0}{2\rho_0 N_0} y^2 - \frac{1 + 3tg^2\varphi_0 + e'^2\cos^2\varphi_0 - 9e'^2 \sin^2\varphi_0}{6\rho_0 N_0^2} x^2 y$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{1}{N_0 \cos\varphi_0} x + \frac{tg\varphi_0}{N_0^2 \cos\varphi_0} xy + \frac{1 + 3tg^2\varphi_0 + e'^2 \cos^2\varphi_0}{3N_0^3 \cos\varphi_0} xy^2 - \frac{tg^2\varphi_0}{3N_0^3 \cos\varphi_0} x^3$$

ἤ

$$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0 = a_1 y + a_2 x^2 + a_3 y^2 + a_4 x^2 y$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = b_1 x + b_2 xy + b_3 xy^2 + b_4 x^3$$

Οἱ συντελεστές $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4$ γιά τό ἐλλειψοειδές τοῦ Besselλαμβάνονται ἀπό τόν Πίνακα (Β).

x καί y σέ χιλιόμετρα

Τά ἀποτελέσματα σέ δευτερόλεπτα τόξου

3) Σύγκλησις τοῦ μεσημβρινοῦ

$$\Delta A = \frac{tg\varphi_0}{N_0} x + \frac{1 + 2tg^2\varphi_0 + e'^2\cos^2\varphi_0}{2N_0^2} xy + \frac{tg\varphi_0(5 + 6tg^2\varphi_0 + e'^2\cos^2\varphi_0)}{6N_0^3} xy^2 - \frac{tg\varphi_0(1 + 2tg^2\varphi_0 + e'^2\cos^2\varphi_0)}{6N_0^3} x^3$$

ἤ

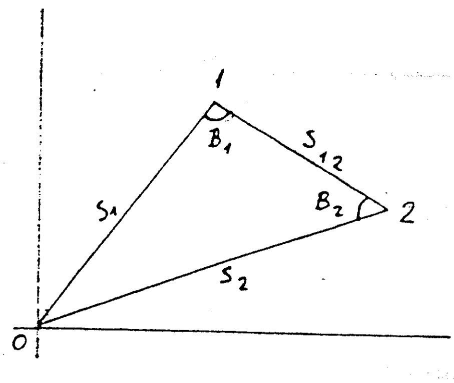
$$\Delta A = e_1 x + e_2 xy + e_3 xy^2 + e_4 x^3$$

Οἱ συντελεστές e_1, e_2, e_3, e_4 γιά τό ἐλλειψοειδές τοῦ Bessel λαμβάνονται ἀπό τόν Πίνακα (Γ).

x καί y σέ χιλιόμετρα

4) Διόρθωση πλευρῶν

$$\delta S_{12} = \frac{S_{12} S_1^2}{6R^2} \sin^2 B_1$$



5) Διόρθωση γωνιῶν

$$\delta B_1 = \frac{S_1}{6R^2} \sin B_1 (S_1 \cos B_1 - 2S_{12})$$

$$\delta B_2 = \frac{S_2}{6R^2} \sin B_2 (S_2 \cos B_2 - 2S_{12})$$

πινακας Α

φ_o		d_I	d_2	d_3	d_4
41	45	23101.179	-99.5893	-.1827	-.0401
41	15	23279.553	-98.6032	-.1841	-.0396
40	45	23456.146	-97.6098	-.1854	-.0392
40	15	23630.944	-96.6092	-.1868	-.0386
39	45	23803.935	-95.6014	-.1881	-.0381
39	15	23975.105	-94.5865	-.1894	-.0376
38	45	24144.442	-93.5646	-.1906	-.0371
38	15	24311.933	-92.5358	-.1919	-.0365
37	45	24477.567	-91.5002	-.1931	-.0359
37	15	24641.330	-90.4578	-.1944	-.0354
36	45	24803.211	-89.4088	-.1956	-.0348
36	15	24963.198	-88.3531	-.1968	-.0342
35	45	25121.278	-87.2909	-.1980	-.0336
35	15	25277.441	-86.2223	-.1991	-.0330
34	45	25431.675	-85.1474	-.2003	-.0324

φ_o		c_I	c_2	c_3	c_4
41	45	30848.973	37.2886	.74606	-.09324
41	15	30846.290	37.2077	.74435	-.08903
40	45	30843.614	37.1155	.74242	-.08484
40	15	30840.945	37.0119	.74027	-.08066
39	45	30838.284	36.8971	.73789	-.07649
39	15	30835.632	36.7711	.73528	-.07234
38	45	30832.990	36.6339	.73245	-.06820
38	15	30830.359	36.4856	.72941	-.06408
37	45	30827.739	36.3261	.72614	-.05997
37	15	30825.131	36.1556	.72265	-.05589
36	45	30822.536	35.9741	.71894	-.05182
36	15	30819.955	35.7816	.71501	-.04778
35	45	30817.388	35.5783	.71087	-.04376
35	15	30814.837	35.3641	.70651	-.03976
34	45	30812.302	35.1392	.70194	-.03579

πινακας B

φ		a_I	a_2	a_3	a_4
41	45	32.415990	-.0022650	-.0000254	-.000000446
41	15	32.418809	-.0022258	-.0000254	-.000000435
40	45	32.421622	-.0021871	-.0000253	-.000000425
40	15	32.424428	-.0021491	-.0000252	-.000000415
39	45	32.427226	-.0021116	-.0000252	-.000000405
39	15	32.430014	-.0020746	-.0000251	-.000000395
38	45	32.432793	-.0020381	-.0000250	-.000000386
38	15	32.435561	-.0020022	-.0000249	-.000000377
37	45	32.438318	-.0019667	-.0000248	-.000000369
37	15	32.441062	-.0019317	-.0000247	-.000000360
36	45	32.443794	-.0018972	-.0000246	-.000000352
36	15	32.446511	-.0018631	-.0000244	-.000000344
35	45	32.449213	-.0018294	-.0000243	-.000000337
35	15	32.451900	-.0017961	-.0000241	-.000000329
34	45	32.454570	-.0017633	-.0000240	-.000000322

φ		b_I	b_2	b_3	b_4
41	45	43.287835	.00604928	.000001200	-.00000028
41	15	42.956151	.00589846	.000001162	-.00000027
40	45	42.632750	.00575195	.000001126	-.00000026
40	15	42.317395	.00560956	.000001091	-.00000025
39	45	42.009862	.00547112	.000001057	-.00000024
39	15	41.709933	.00533649	.000001025	-.00000023
38	45	41.417400	.00520549	.000000994	-.00000022
38	15	41.132064	.00507800	.000000965	-.00000021
37	45	40.853734	.00495386	.000000936	-.00000020
37	15	40.582225	.00483296	.000000909	-.00000019
36	45	40.317361	.00471515	.000000883	-.00000018
36	15	40.058971	.00460093	.000000857	-.00000018
35	45	39.806892	.00448838	.000000833	-.00000017
35	15	39.560966	.00437919	.000000810	-.00000016
34	45	39.321044	.00427265	.000000787	-.00000015
....					

πινακας Γ

φ_o		e_I	e_2	e_3	e_4
41	45	28.82458	.0065658	.00000115	-.0000003
41	15	28.32296	.0064271	.00000111	-.0000003
40	45	27.82894	.0062929	.00000108	-.0000003
40	15	27.34228	.0061631	.00000104	-.0000003
39	45	26.86274	.0060373	.00000100	-.0000003
39	15	26.39010	.0059156	.00000097	-.0000003
38	45	25.92412	.0057977	.00000094	-.0000002
38	15	25.46461	.0056835	.00000091	-.0000002
37	45	25.01136	.0055729	.00000088	-.0000002
37	15	24.56418	.0054657	.00000085	-.0000002
36	45	24.12287	.0053618	.00000082	-.0000002
36	15	23.68726	.0052611	.00000080	-.0000002
35	45	23.25716	.0051635	.00000077	-.0000002
35	15	22.83242	.0050689	.00000075	-.0000002
34	45	22.41287	.0049771	.00000072	-.0000002

Π Α Ρ Α Ρ Τ Η Μ Α   Β

Τυπολόγιο καί άποσπάσματα πινάκων Έγκαρσίας Μερκατορικής προβολής

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

1) Μετατροπή Γεωδαιτικών συντεταγμένων (φ,λ) σε επίπεδες καρτεσιανές X,Y.

$$Y = K_o M + K_o \frac{N}{2} \cos\varphi \sin\varphi \Delta\lambda^2 + K_o \frac{N}{24} \sin\varphi \cos^3\varphi (5 - tg^2\varphi + 9e' \cos^2\varphi) \Delta\lambda^4$$

$$+ K_o \frac{N}{720} \sin\varphi \cos^5\varphi \ (61 - 58tg^2\varphi + tg^4\varphi) \Delta\lambda^6$$

$$X = X_o + K_o N \cos\varphi \Delta\lambda + K_o \frac{N}{6} \cos^3\varphi (1 - tg^2\varphi + e'^2 \cos^2\varphi) \Delta\lambda^3 + \frac{K_o N \cos^5\varphi}{120} \ (5 - 18tg^2\varphi +$$

$$tg^4\varphi + 14e'^2 \cos^2\varphi - 58e'^2 \sin^2\varphi) \Delta\lambda^5$$

όπου

K_o = συντελεστής κλίμακας 0,9996 για U.T.M. και ΕΓΣΑ 87 και 0.9999 για το σύστημα 3^o

M = τόξο μεσημβρινού από πλάτος φ_o έως φ. Για U.T.M. και ΕΓΣΑ φ_o=0 ενώ για το σύστημα 3^o $\varphi_o = 34^o$.

X_o = τετμημένη κ.μ.Για UTM και ΕΓΣΑ 87 X_o=500.000m ενώ για το σύστημα 3^o X_o=200.000m.

<u>Χρήση πινάκων</u>

α) Για το σύστημα U.T.M.

$X = E, \quad X - X_o = E', \quad Y = N$

$$N = (I) + (II)\ p^2 + (III)\ p^4 + A_6$$

$$E' = (IV)\ p + (V)\ p^3 + B_5$$

$$E = E' + 500.000$$

όπου

$p = 0{,}0001\ \Delta\lambda''$ ή $\Delta\lambda'' = 10^4 p$

Οι συντελεστές (I), (II), (III), (IV), (V), B_5, A_6 από τον πίνακα (1) με στοιχείο εισαγωγής το γεωγραφικό πλάτος φ.

β) Για το σύστημα 3^o

$E = X, \quad N = Y$

$$N = (I) + (II)\ p^2 + (III)\ p^4$$

$$E = 200.000 + (IV)p + (V)\ p^3 + A$$

Οι συντελεστές (I), (II), (III), (IV),(V)A από τον πίνακα (A) με στοιχείο εισαγωγής το πλάτος φ

$p = 0{,}0001\ \Delta\lambda''$

2) Μετατροπή επίπεδων καρτεσιανών X,Y σε Γεωδαιτικές φ,λ *

$$\varphi = \varphi' - \frac{tg\varphi'}{2K_o^2 N'\rho'}X^2 + \frac{tg\varphi'(5+3tg^2\varphi' + e'^2\cos^2\varphi' - 4e'^4\cos^4\varphi' - 9e'^2\sin^2\varphi')}{24K_o^4 N'^3\rho'}X^4 -$$

$$- \frac{tg\varphi'(61+90tg^2\varphi' + 46e'^2\cos^2\varphi' + 45tg^4\varphi' - 252e'^2\sin^2\varphi')}{720N'^5\rho' K_o^6}X^6$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \frac{X}{N'\cos\varphi' K_o} - \frac{(1+2tg^2\varphi' + e'^2\cos^2\varphi')}{6N'^3\cos\varphi'\ K_o^3}X^3 + \frac{(5+28tg^2\varphi' + 24tg^4\varphi' +}{120N'^5\cos\varphi' K_o^5}$$

$$+ \frac{6e'^2\cos^2\varphi' + 8e'^2\sin^2\varphi')}{}X^5$$

φ' = Πλάτος του ποδός της καθέτου από το σημείο προς τον κεντρικό μεσημβρινό, συνεπώς είναι το πλάτος που αντιστοιχεί σε τόξο μεσημβρινού ίσο με Y/K_o

Χρήση πινάκων

α) Για το σύστημα U.T.M.

$\varphi = \varphi' - (VII)\, q^2 + (VIII)\, q^4 - D_6$

$\Delta\lambda = (IX)q - (X)\, q^3 + E_5$

όπου

$q = (E - 500.000)\, 10^{-6} = E'10^{-6}$

Οι συντελεστές (VII), (VIII), (IX), (X),D_6,E_5 από τον πίνακα (2) με στοιχείο εισόδου το πλάτος φ'

β) Για το σύστημα των 3^o

$\varphi = \varphi' + (VI)\, Q^2 + (VII)\, Q^4$

$\lambda = \lambda_o + (VIII)Q + (IX)\, Q^3 + (X)\, Q^5$

$Q = (E - 200.000)10^{-6}$

Οι συντελεστές (VI), (VII), (VIII), (IX). (X) από τον πίνακα (Β) με στοιχείο είσόδου το φ'.

Το φ' και στις 2 περιπτώσεις ευρίσκεται με αντίστροφη παρεμβολή από την στήλη (I) με στοιχείο εισόδου το Ν.

3) Σύγκλιση του μεσημβρινού

3.1. Από Γεωδαιτικές συντεταγμένες

$$\gamma = \sin\varphi\Delta\lambda + \frac{\sin\varphi\cos^2\varphi(1+3e'^2\cos^2\varphi+2e'^4\cos^4\varphi)}{3}\Delta\lambda^3 + \frac{\sin\varphi\cos^4\varphi(2-tg^2\varphi)}{15}\Delta\lambda^5$$

Χρήση πινάκων

α) Για U.T.M.

$$\gamma = (XII)p + (XIII)\,p^3 + C_5$$

Οι (XII), (XIII), C_5 από τον πίνακα (3) με στοιχείο εισόδου το πλάτος φ.

β) Για το σύστημα των 3^o.

$$\gamma = (XI)p + (XII)p^3$$

Οι (XI) και (XII) από τον πίνακα (Γ) με στοιχείο εισαγωγής το πλάτος φ.

3.2. Από επίπεδες συντεταγμένες *

$$\gamma = \frac{tg\varphi'}{N'K_o}\,x - \frac{tg\varphi'(1+tg\varphi'^2-e'^2\cos^2\varphi'-2e'^4\cos^4\varphi')}{3N'^3K_o^3}\,x^3 + \frac{tg\varphi'(2+5tg^2\varphi'+3tg^4\varphi')}{15N'^5K_o^5}\,x^5$$

Χρήση πινάκων

α) Για U.T.M.

$$\gamma = (XV)q - (XVI)\,q^3 + F_5$$

Οι (XV), (XVI), F_5 από τον πίνακα (4) με στοιχείο εισόδου το πλάτος φ'.

β) Για το σύστημα των 3^o

$$\gamma = (XIII)\,Q + (XIV)\,Q^3$$

Οι (XIII), (XIV) από τον πίνακα (Δ) με στοιχείο είσόδου το φ'

4) Υπολογισμός κλίμακας σε σημείο

4.1. Από γεωδαιτικές συντεταγμένες

$$K = K_0 + K_0 \frac{1}{2}\cos^2\varphi(1+e'^2\cos^2\varphi)\Delta\lambda^2 + K_0 \frac{1}{24}\cos^4\varphi(1-4tg^2\varphi+14e'^2\cos^2\varphi)\,\Delta\lambda^4$$

Οι πίνακες U.T.M. δεν δίνουν την κλίμακα K από γεωδαιτικές συντεταγμένες

Χρήση πινάκων

Για το σύστημα των 3^0

$$F = F_0 + (XVI)\,p^2$$

$$F = K,\ F_0 = K_0$$

Ο συντελεστής (XVI) από τον πίνακα (E) με στοιχείο εισόδου το φ.

4.2. Από επίπεδες συντεταγμένες *

$$K = K_0 \left(1 + \frac{X^2}{2N'\rho' K_0^2} + \frac{X^4}{24N'^2\rho'^2 K_0^4}\right)$$

Χρήση πινάκων

α) Για το σύστημα U.T.M.

$$K = K_0 (1 + XVIIIq^2 + 0.00003q^4)$$

Ο (XVIII) από τον πίνακα (5) με στοιχείο εισόδου το N του σημείου

β) Για το σύστημα των 3^0

$$F = F_0 + (XVII)\,Q^2$$

Ο (XVII) από τον πίνακα (E) με στοιχείο εισόδου το N του σημείου

5) Υπολογισμός μέσης κλίμακας κατά μήκος πεπερασμένης απόστασης *

$$K_{12} = K_0 \left[1 + \frac{(X_1^2+X_1X_2+X_2^2)}{6N\rho K_0^2} \left(1 + \frac{(X_1^2+X_1X_2+X_2^2)}{36N\rho K_0^2}\right) \right]$$

Χρήση πινάκων

α) Για το σύστημα U,T.M.

$$K_{12} = K_o \left(1 + (XVIII)\, q_M^2 + 0{,}00003\, q_M^4 \right)$$

όπου $q_M^2 = \dfrac{q_1^2+q_1q_2+q_2^2}{3}$

O (XVIII) από τον πίνακα (5) με στοιχείο εισόδου το N που αντιστοιχεί στο μέσο της απόστασης.

β) Για το σύστημα των 3^o

$$F_{12}= F_o + \frac{1}{3}\,(Q_1^2+Q_1Q_2 + Q_2^2)\ (XVII)$$

O (XVII) από τον (E) με στοιχείο εισόδου το N στο μέσο της 1,2.

6) Αναγωγή τόξου σε χορδή, διευθύνσεως 1,2*

$$\delta_{12} = \frac{(Y_1-Y_2)(2X_1+X_2)}{6N\rho K_o^2}\left(1 - \frac{(2X_1+X_2)^2}{27N\rho K_o^2}\right)$$

Χρήση πινάκων

α) Για U.T.M.

$$\delta_{12} = \delta_o\ (1-(2q_1+q_2)^2 0{,}91.10^{-3})$$

$$\delta_o = 6{,}8755\ (XVIII)\ (N_1-N_2)\ (2q_1+q_2)10^{-2}$$

O (XVIII) από τον πίνακα (5) με στοιχείο εισόδου το N στο 1/3 της απόστασης 1,2.

β) Για το σύστημα των 3^o

$$\delta_{12} = (N_1-N_2)\ (2Q_1+Q_2)\ 10^{-6}\ (XVIII)$$

O XVIII από τον πίνακα (E) με στοιχείο εισόδου το N στο 1/3 της απόστασης 1,2.

---

* Σε όλες τις σχέσεις που υπολογίζονται στοιχεία συναρτήσει των X,Y όπου X θεωρείται το $X-X_o$

Πίναξ 1

38°

UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID

$p = .0001\ \Delta\lambda\ ''$

N of Equator $N = (I) + (II)p^2 + (III)p^4 + A_6$

S of Equator $N = 10{,}000{,}000 - [(I) + (II)p^2 + (III)p^4 + A_6]$

Latitude	(I)	Diff. 1″	(II)	Diff. 1″	(III)
38°00′	4 205 884.765	30.82090	3 639.863	0.00885	1.960
01	4 207 734.019	30.82098	3 640.394	0.00883	1.959
02	4 209 583.278	30.82108	3 640.924	0.00881	1.958
03	4 211 432.543	30.82117	3 641.452	0.00879	1.957
04	4 213 281.813	30.82125	3 641.979	0.00876	1.956
38 05	4 215 131.088	30.82133	3 642.505	0.00874	1.955
06	4 216 980.368	30.82142	3 643.030	0.00872	1.954
07	4 218 829.653	30.82152	3 643.553	0.00870	1.953
08	4 220 678.944	30.82160	3 644.075	0.00868	1.953
09	4 222 528.240	30.82170	3 644.596	0.00866	1.952
38 10	4 224 377.542	30.82177	3 645.116	0.00864	1.951
11	4 226 226.848	30.82187	3 645.635	0.00862	1.950
12	4 228 076.160	30.82195	3 646.152	0.00860	1.949
13	4 229 925.477	30.82205	3 646.668	0.00858	1.948
14	4 231 774.800	30.82213	3 647.183	0.00856	1.947
38 15	4 233 624.128	30.82222	3 647.696	0.00854	1.946
16	4 235 473.461	30.82230	3 648.209	0.00852	1.945
17	4 237 322.799	30.82240	3 648.720	0.00850	1.944
18	4 239 172.143	30.82248	3 649.230	0.00848	1.943
19	4 241 021.492	30.82257	3 649.738	0.00846	1.942
38 20	4 242 870.846	30.82267	3 650.246	0.00844	1.941
21	4 244 720.205	30.82275	3 650.752	0.00842	1.940
22	4 246 569.570	30.82283	3 651.257	0.00840	1.939
23	4 248 418.940	30.82293	3 651.761	0.00837	1.938
24	4 250 268.316	30.82302	3 652.263	0.00835	1.937
38 25	4 252 117.697	30.82310	3 652.764	0.00833	1.936
26	4 253 967.083	30.82318	3 653.264	0.00831	1.935
27	4 255 816.474	30.82328	3 653.763	0.00829	1.934
28	4 257 665.871	30.82337	3 654.261	0.00827	1.933
29	4 259 515.273	30.82345	3 654.757	0.00825	1.932
38 30	4 261 364.680	30.82355	3 655.252	0.00823	1.931
31	4 263 214.093	30.82363	3 655.746	0.00821	1.930
32	4 265 063.511	30.82372	3 656.238	0.00819	1.930
33	4 266 912.934	30.82380	3 656.730	0.00817	1.929
34	4 268 762.362	30.82390	3 657.220	0.00815	1.928
38 35	4 270 611.796	30.82398	3 657.709	0.00813	1.927
36	4 272 461.235	30.82407	3 658.196	0.00811	1.926
37	4 274 310.679	30.82417	3 658.683	0.00809	1.925
38	4 276 160.128	30.82425	3 659.168	0.00807	1.924
39	4 278 009.583	30.82433	3 659.652	0.00804	1.923
38 40	4 279 859.043	30.82443	3 660.134	0.00802	1.922
41	4 281 708.509	30.82452	3 660.616	0.00800	1.921
42	4 283 557.980	30.82460	3 661.096	0.00798	1.920
43	4 285 407.456	30.82470	3 661.575	0.00796	1.919
44	4 287 256.938	30.82478	3 662.053	0.00794	1.918
38 45	4 289 106.425	30.82487	3 662.529	0.00792	1.917
46	4 290 955.917	30.82497	3 663.005	0.00790	1.916
47	4 292 805.415	30.82505	3 663.479	0.00788	1.915
48	4 294 654.918	30.82513	3 663.951	0.00786	1.914
49	4 296 504.426	30.82521	3 664.423	0.00784	1.913
38 50	4 298 353.938	30.82531	3 664.893	0.00782	1.912
51	4 300 203.457	30.82540	3 665.362	0.00780	1.911
52	4 302 052.981	30.82548	3 665.830	0.00778	1.910
53	4 303 902.510	30.82558	3 666.297	0.00776	1.909
54	4 305 752.045	30.82566	3 666.762	0.00774	1.908
38 55	4 307 601.585	30.82575	3 667.226	0.00771	1.907
56	4 309 451.130	30.82585	3 667.689	0.00769	1.906
57	4 311 300.681	30.82593	3 668.151	0.00767	1.905
58	4 313 150.237	30.82601	3 668.611	0.00765	1.904
59	4 314 999.797	30.82611	3 669.070	0.00763	1.903
39 00	4 316 849.364		3 669.528		1.902

Πίναξ 1

INTERNATIONAL SPHEROID
METERS

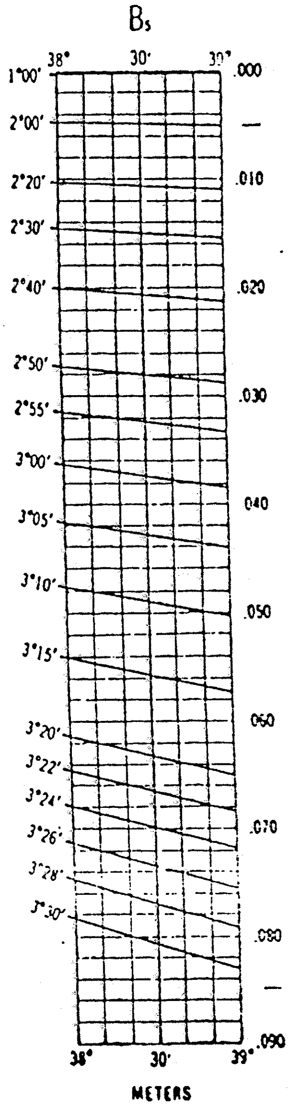
-38°

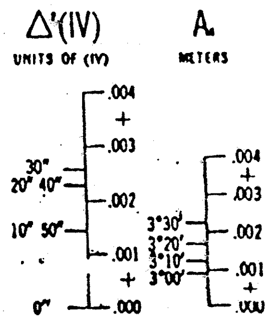
$E' = (IV)p + (V)p^3 + B_5$

$p = .0001\ \Delta\lambda\ ''$

Latitude	(IV)	Diff. 1″	(V)	Diff. 1″
38°00′	243 892.375	−0.92012	23.363	−0.00099
01	243 837.168	0.92046	23.304	0.00099
02	243 781.940	0.92081	23.244	0.00099
03	243 726.692	0.92115	23.185	0.00099
04	243 671.423	0.92150	23.126	0.00099
38 05	243 616.133	−0.92184	23.066	−0.00099
06	243 560.823	0.92219	23.007	0.00099
07	243 505.492	0.92253	22.947	0.00099
08	243 450.140	0.92288	22.888	0.00099
09	243 394.767	0.92322	22.829	0.00099
38 10	243 339.374	−0.92356	22.769	−0.00099
11	243 283.960	0.92391	22.710	0.00099
12	243 226.526	0.92425	22.651	0.00099
13	243 173.070	0.92460	22.592	0.00099
14	243 117.595	0.92494	22.532	0.00099
38 15	243 062.098	−0.92528	22.473	−0.00099
16	243 006.581	0.92563	22.414	0.00099
17	242 951.043	0.92597	22.355	0.00099
18	242 895.485	0.92632	22.296	0.00099
19	242 839.906	0.92666	22.236	0.00099
38 20	242 784.307	−0.92700	22.177	−0.00099
21	242 728.686	0.92735	22.118	0.00099
22	242 673.045	0.92769	22.059	0.00099
23	242 617.384	0.92803	22.000	0.00098
24	242 561.702	0.92838	21.941	0.00098
38 25	242 505.999	−0.92872	21.882	−0.00098
26	242 450.276	0.92906	21.823	0.00098
27	242 394.532	0.92941	21.764	0.00098
28	242 338.768	0.92975	21.705	0.00098
29	242 282.983	0.93009	21.646	0.00098
38 30	242 227.177	−0.93044	21.587	−0.00098
31	242 171.351	0.93078	21.528	0.00098
32	242 115.504	0.93112	21.469	0.00098
33	242 059.637	0.93146	21.410	0.00098
34	242 003.749	0.93181	21.351	0.00098
38 35	241 947.841	−0.93215	21.292	−0.00098
36	241 891.912	0.93249	21.233	0.00098
37	241 835.963	0.93283	21.174	0.00098
38	241 779.993	0.93318	21.115	0.00098
39	241 724.002	0.93352	21.056	0.00098
38 40	241 667.991	−0.93386	20.998	−0.00098
41	241 611.959	0.93420	20.939	0.00098
42	241 555.907	0.93454	20.880	0.00098
43	241 499.834	0.93489	20.821	0.00098
44	241 443.741	0.93523	20.762	0.00098
38 45	241 387.628	−0.93557	20.704	−0.00098
46	241 331.494	0.93591	20.645	0.00098
47	241 275.339	0.93625	20.586	0.00098
48	241 219.164	0.93659	20.527	0.00098
49	241 162.968	0.93694	20.469	0.00098
38 50	241 106.752	−0.93728	20.410	−0.00098
51	241 050.515	0.93762	20.351	0.00098
52	240 994.258	0.93796	20.293	0.00098
53	240 937.981	0.93830	20.234	0.00098
54	240 881.683	0.93864	20.176	0.00098
38 55	240 825.364	−0.93898	20.117	−0.00098
56	240 769.025	0.93932	20.058	0.00098
57	240 712.666	0.93966	20.000	0.00098
58	240 656.286	0.94000	19.941	0.00098
59	240 599.886	0.94035	19.683	0.00097
39 00	240 543.465		19.824	

B_5





Πίναξ 2

38°

UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID

q=.000001E′

$\phi=\phi'-(VII)q^2+(VIII)q^4-D_6$

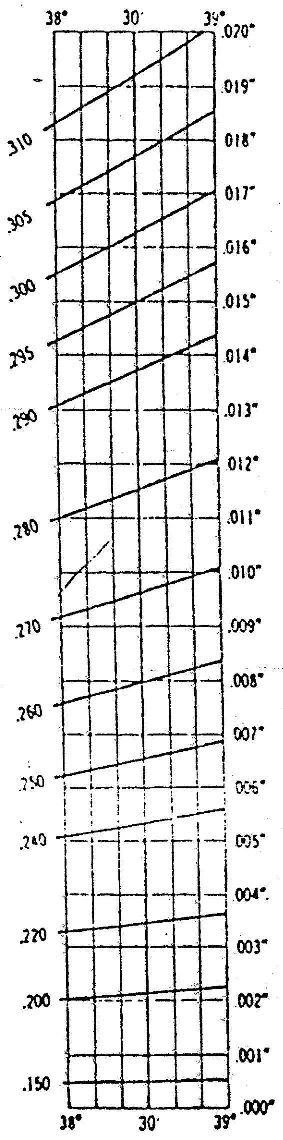
Latitude	(I) —	Diff. 1″	(VII)	Diff. 1″	(VIII)
38°00′	4 205 884.765	30.82090	1 985.381	0.01973	27.65
01	4 207 734.019	30.82098	1 986.565	0.01972	27.68
02	4 209 583.278	30.82108	1 987.748	0.01975	27.71
03	4 211 432.543	30.82117	1 988.933	0.01973	27.73
04	4 213 281.813	30.82125	1 990.117	0.01977	27.76
38 05	4 215 131.088	30.82133	1 991.303	0.01975	27.78
06	4 216 980.368	30.82142	1 992.488	0.01978	27.81
07	4 218 829.653	30.82152	1 993.675	0.01978	27.83
08	4 220 678.944	30.82160	1 994.862	0.01978	27.86
09	4 222 528.240	30.82170	1 996.049	0.01980	27.88
38 10	4 224 377.542	30.82177	1 997.236	0.01982	27.91
11	4 226 226.848	30.82187	1 998.425	0.01982	27.93
12	4 228 076.160	30.82195	1 999.614	0.01982	27.96
13	4 229 925.477	30.82205	2 000.803	0.01983	27.99
14	4 231 774.800	30.82213	2 001.993	0.01985	28.01
38 15	4 233 624.128	30.82222	2 003.184	0.01985	28.04
16	4 235 473.461	30.82230	2 004.375	0.01987	28.06
17	4 237 322.799	30.82240	2 005.567	0.01987	28.09
18	4 239 172.143	30.82248	2 006.759	0.01987	28.11
19	4 241 021.492	30.82257	2 007.951	0.01990	28.14
38 20	4 242 870.846	30.82267	2 009.145	0.01990	28.17
21	4 244 720.205	30.82275	2 010.339	0.01992	28.19
22	4 246 569.570	30.82283	2 011.534	0.01992	28.22
23	4 248 418.940	30.82293	2 012.729	0.01992	28.24
24	4 250 268.316	30.82302	2 013.924	0.01993	28.27
38 25	4 252 117.697	30.82310	2 015.120	0.01995	28.30
26	4 253 967.083	30.82318	2 016.317	0.01995	28.32
27	4 255 816.474	30.82328	2 017.514	0.01997	28.35
28	4 257 665.871	30.82337	2 018.712	0.01997	28.37
29	4 259 515.273	30.82345	2 019.910	0.01998	28.40
38 30	4 261 364.680	30.82355	2 021.109	0.01998	28.43
31	4 263 214.093	30.82363	2 022.308	0.02000	28.45
32	4 265 063.511	30.82372	2 023.507	0.02002	28.48
33	4 266 912.934	30.82380	2 024.708	0.02002	28.50
34	4 268 762.362	30.82390	2 025.909	0.02002	28.53
38 35	4 270 611.796	30.82398	2 027.110	0.02003	28.56
36	4 272 461.235	30.82407	2 028.312	0.02005	28.58
37	4 274 310.679	30.82417	2 029.515	0.02005	28.61
38	4 276 160.128	30.82425	2 030.718	0.02007	28.63
39	4 278 009.583	30.82433	2 031.922	0.02007	28.66
38 40	4 279 859.043	30.82443	2 033.126	0.02008	28.69
41	4 281 708.509	30.82452	2 034.331	0.02010	28.71
42	4 283 557.980	30.82460	2 035.537	0.02010	28.74
43	4 285 407.456	30.82470	2 036.743	0.02010	28.77
44	4 287 256.938	30.82478	2 037.949	0.02012	28.79
38 45	4 289 106.425	30.82487	2 039.156	0.02013	28.82
46	4 290 955.917	30.82497	2 040.364	0.02013	28.85
47	4 292 805.415	30.82505	2 041.572	0.02015	28.87
48	4 294 654.918	30.82513	2 042.781	0.02015	28.90
49	4 296 504.426	30.82521	2 043.990	0.02017	28.93
38 50	4 298 353.938	30.82531	2 045.200	0.02017	28.95
51	4 300 203.457	30.82540	2 046.410	0.02018	28.98
52	4 302 052.981	30.82548	2 047.621	0.02020	29.01
53	4 303 902.510	30.82558	2 048.833	0.02020	29.03
54	4 305 752.045	30.82566	2 050.045	0.02022	29.06
38 55	4 307 601.585	30.82575	2 051.258	0.02022	29.09
56	4 309 451.130	30.82585	2 052.471	0.02023	29.11
57	4 311 300.681	30.82593	2 053.685	0.02023	29.14
58	4 313 150.237	30.82601	2 054.899	0.02025	29.17
59	4 314 999.797	30.82611	2 056.114	0.02027	29.19
39 00	4 316 849.364		2 057.330		29.22

INTERNATIONAL SPHEROID
METERS

$q = .000001E'$ $\Delta\lambda = (IX)q - (X)q^3 + E_5$

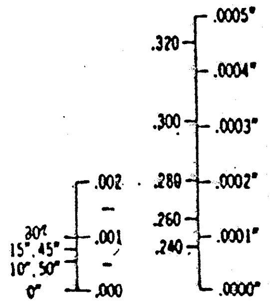
Latitude	(IX)	Diff. 1″	(X)	Diff. 1″
38°00′	41 001.692	0.15472	373.080	0.00548
01	41 010.975	0.15485	373.409	0.00549
02	41 020.266	0.15498	373.738	0.00550
03	41 029.564	0.15510	374.068	0.00551
04	41 038.871	0.15523	374.399	0.00551
38 05	41 048.185	0.15536	374.729	0.00552
06	41 057.506	0.15549	375.061	0.00553
07	41 066.836	0.15562	375.392	0.00554
08	41 076.173	0.15575	375.725	0.00554
09	41 085.518	0.15588	376.057	0.00555
38 10	41 094.870	0.15601	376.390	0.00556
11	41 104.231	0.15614	376.724	0.00557
12	41 113.599	0.15626	377.058	0.00557
13	41 122.975	0.15639	377.392	0.00558
14	41 132.358	0.15652	377.727	0.00559
38 15	41 141.750	0.15665	378.062	0.00560
16	41 151.149	0.15678	378.398	0.00560
17	41 160.556	0.15691	378.734	0.00561
18	41 169.971	0.15704	379.071	0.00562
19	41 179.393	0.15717	379.408	0.00563
38 20	41 188.824	0.15730	379.746	0.00563
21	41 198.262	0.15743	380.084	0.00564
22	41 207.708	0.15757	380.422	0.00565
23	41 217.162	0.15770	380.761	0.00566
24	41 226.624	0.15783	381.100	0.00566
38 25	41 236.093	0.15796	381.440	0.00567
26	41 245.571	0.15809	381.780	0.00568
27	41 255.056	0.15822	382.121	0.00569
28	41 264.549	0.15835	382.462	0.00569
29	41 274.050	0.15848	382.804	0.00570
38 30	41 283.559	0.15861	383.146	0.00571
31	41 293.076	0.15875	383.489	0.00572
32	41 302.601	0.15888	383.832	0.00572
33	41 312.133	0.15901	384.175	0.00573
34	41 321.674	0.15914	384.519	0.00574
38 35	41 331.222	0.15927	384.864	0.00575
36	41 340.779	0.15941	385.208	0.00576
37	41 350.343	0.15954	385.554	0.00576
38	41 359.915	0.15967	385.900	0.00577
39	41 369.495	0.15980	386.246	0.00578
38 40	41 379.084	0.15993	386.593	0.00579
41	41 388.680	0.16007	386.940	0.00579
42	41 398.284	0.16020	387.288	0.00580
43	41 407.896	0.16033	387.636	0.00581
44	41 417.516	0.16047	387.984	0.00582
38 45	41 427.144	0.16060	388.333	0.00583
46	41 436.780	0.16073	388.683	0.00583
47	41 446.424	0.16087	389.033	0.00584
48	41 456.076	0.16100	389.383	0.00585
49	41 465.736	0.16113	389.734	0.00586
38 50	41 475.404	0.16127	390.086	0.00587
51	41 485.080	0.16140	390.438	0.00587
52	41 494.764	0.16154	390.790	0.00588
53	41 504.457	0.16167	391.143	0.00589
54	41 514.157	0.16181	391.496	0.00590
38 55	41 523.865	0.16194	391.850	0.00591
56	41 533.582	0.16208	392.204	0.00591
57	41 543.306	0.16221	392.559	0.00592
58	41 553.039	0.16234	392.915	0.00593
59	41 562.780	0.16248	393.270	0.00594
39 00	41 572.528		393.626	

E_5



$\Delta^2(IX)$ D_6

UNITS OF (IX) SECONDS



Πίναξ 3

38°

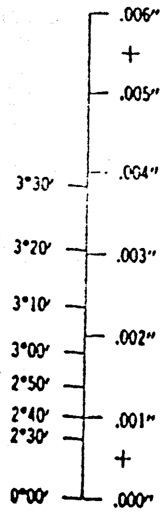
UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID

$p = .0001\ \Delta\lambda$ ″

$C = (XII)p + (XIII)p^3 + C_5$

Latitude	(XII)	Diff. 1″	(XIII)
38°00′	6 156.615	0.03820	3.033
01	6 158.907	0.03818	3.033
02	6 161.198	0.03818	3.033
03	6 163.489	0.03818	3.032
04	6 165.780	0.03815	3.032
38 05	6 168.069	0.03817	3.032
06	6 170.359	0.03815	3.032
07	6 172.648	0.03813	3.031
08	6 174.936	0.03813	3.031
09	6 177.224	0.03812	3.031
38 10	6 179.511	0.03812	3.030
11	6 181.798	0.03810	3.030
12	6 184.084	0.03810	3.030
13	6 186.370	0.03808	3.030
14	6 188.655	0.03807	3.029
38 15	6 190.939	0.03808	3.029
16	6 193.224	0.03805	3.029
17	6 195.507	0.03805	3.028
18	6 197.790	0.03805	3.028
19	6 200.073	0.03803	3.028
38 20	6 202.355	0.03802	3.028
21	6 204.636	0.03802	3.027
22	6 206.917	0.03802	3.027
23	6 209.198	0.03800	3.027
24	6 211.478	0.03798	3.026
38 25	6 213.757	0.03798	3.026
26	6 216.036	0.03797	3.026
27	6 218.314	0.03797	3.025
28	6 220.592	0.03797	3.025
29	6 222.870	0.03793	3.025
38 30	6 225.146	0.03795	3.024
31	6 227.423	0.03792	3.024
32	6 229.698	0.03793	3.024
33	6 231.974	0.03790	3.024
34	6 234.248	0.03790	3.023
38 35	6 236.522	0.03790	3.023
36	6 238.796	0.03788	3.023
37	6 241.069	0.03788	3.022
38	6 243.342	0.03787	3.022
39	6 245.614	0.03785	3.022
38 40	6 247.885	0.03785	3.021
41	6 250.156	0.03785	3.021
42	6 252.427	0.03782	3.021
43	6 254.696	0.03783	3.020
44	6 256.966	0.03782	3.020
38 45	6 259.235	0.03780	3.020
46	6 261.503	0.03780	3.019
47	6 263.771	0.03778	3.019
48	6 266.038	0.03778	3.019
49	6 268.305	0.03777	3.018
38 50	6 270.571	0.03777	3.018
51	6 272.837	0.03775	3.018
52	6 275.102	0.03773	3.017
53	6 277.366	0.03775	3.017
54	6 279.631	0.03772	3.017
38 55	6 281.894	0.03772	3.016
56	6 284.157	0.03772	3.016
57	6 286.420	0.03770	3.016
58	6 288.682	0.03768	3.015
59	6 290.943	0.03768	3.015
39 00	6 293.204		3.014

C_5



Πίναξ 4

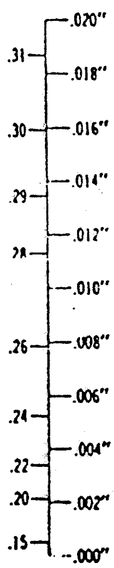
38°

UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID

q=.000001E′ $C=(XV)q-(XVI)q^2+F_5$

Latitude	(XV)	Diff. 1″	(XVI)
38°00′	25 243.16	0.2519	331.6
01	25 258.28	0.2520	332.0
02	25 273.40	0.2521	332.3
03	25 288.53	0.2523	332.7
04	25 303.66	0.2524	333.0
38 05	25 318.81	0.2525	333.4
06	25 333.95	0.2526	333.7
07	25 349.11	0.2527	334.1
08	25 364.27	0.2528	334.4
09	25 379.44	0.2529	334.8
38 10	25 394.62	0.2531	335.1
11	25 409.80	0.2532	335.5
12	25 424.99	0.2533	335.8
13	25 440.19	0.2534	336.2
14	25 455.40	0.2535	336.5
38 15	25 470.61	0.2536	336.9
16	25 485.83	0.2538	337.3
17	25 501.05	0.2539	337.6
18	25 516.28	0.2540	338.0
19	25 531.52	0.2541	338.3
38 20	25 546.77	0.2542	338.7
21	25 562.02	0.2543	339.0
22	25 577.28	0.2545	339.4
23	25 592.55	0.2546	339.8
24	25 607.83	0.2547	340.1
38 25	25 623.11	0.2548	340.5
26	25 638.40	0.2549	340.8
27	25 653.69	0.2550	341.2
28	25 668.99	0.2552	341.6
29	25 684.30	0.2553	341.9
38 30	25 699.62	0.2554	342.3
31	25 714.94	0.2555	342.7
32	25 730.27	0.2556	343.0
33	25 745.61	0.2557	343.4
34	25 760.96	0.2559	343.7
38 35	25 776.31	0.2560	344.1
36	25 791.67	0.2561	344.5
37	25 807.03	0.2562	344.8
38	25 822.41	0.2563	345.2
39	25 837.79	0.2565	345.6
38 40	25 853.18	0.2566	345.9
41	25 868.57	0.2567	346.3
42	25 883.97	0.2568	346.7
43	25 899.38	0.2569	347.0
44	25 914.80	0.2571	347.4
38 45	25 930.22	0.2572	347.8
46	25 945.65	0.2578	348.2
47	25 961.09	0.2574	348.5
48	25 976.54	0.2575	348.9
49	25 991.99	0.2577	349.3
38 50	26 007.45	0.2578	349.6
51	26 022.91	0.2579	350.0
52	26 038.39	0.2580	350.4
53	26 053.87	0.2581	350.8
54	26 069.36	0.2583	351.1
38 55	26 084.85	0.2584	351.5
56	26 100.36	0.2585	351.9
57	26 115.87	0.2586	352.2
58	26 131.38	0.2587	352.6
59	26 146.91	0.2589	353.0
39 00	26 162.44		353.4

F_5



UNIVERSAL TRANSVERSE MERCATOR GRID

INTERNATIONAL SPHEROID

METERS

$q = 0.000001E'$
$k_o = 0.9996$

Scale Factor
$k = k_o\,[1 + (XVIII)q^2 + 0.00003q^4]$

NORTHING Southern Hemisphere	NORTHING Northern Hemisphere	(XVIII)
10 000 000	000 000	0.012383
9 900 000	100 000	0.012383
9 800 000	200 000	0.012383
9 700 000	300 000	0.012383
9 600 000	400 000	0.012382
9 500 000	500 000	0.012382
9 400 000	600 000	0.012381
9 300 000	700 000	0.012381
9 200 000	800 000	0.012380
9 100 000	900 000	0.012380
9 000 000	1 000 000	0.012379
8 900 000	1 100 000	0.012378
8 800 000	1 200 000	0.012377
8 700 000	1 300 000	0.012376
8 600 000	1 400 000	0.012375
8 500 000	1 500 000	0.012374
8 400 000	1 600 000	0.012373
8 300 000	1 700 000	0.012371
8 200 000	1 800 000	0.012370
8 100 000	1 900 000	0.012368
8 000 000	2 000 000	0.012357
7 900 000	2 100 000	0.012365
7 800 000	2 200 000	0.012364
7 700 000	2 300 000	0.012362
7 600 000	2 400 000	0.012360
7 500 000	2 500 000	0.012358
7 400 000	2 600 000	0.012356
7 300 000	2 700 000	0.012355
7 200 000	2 800 000	0.012353
7 100 000	2 900 000	0.012351
7 000 000	3 000 000	0.012348
6 900 000	3 100 000	0.012346
6 800 000	3 200 000	0.012344
6 700 000	3 300 000	0.012342
6 600 000	3 400 000	0.012340
6 500 000	3 500 000	0.012337
6 400 000	3 600 000	0.012335
6 300 000	3 700 000	0.012333
6 200 000	3 800 000	0.012330
6 100 000	3 900 000	0.012328
6 000 000	4 000 000	0.012325
5 900 000	4 100 000	0.012323
5 800 000	4 200 000	0.012320
5 700 000	4 300 000	0.012318
5 600 000	4 400 000	0.012315

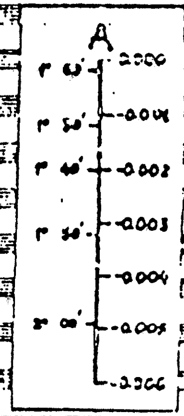
NORTHING Southern Hemisphere	NORTHING Northern Hemisphere	(XVIII)
5 500 000	4 500 000	0.012312
5 400 000	4 600 000	0.012310
5 300 000	4 700 000	0.012307
5 200 000	4 800 000	0.012305
5 100 000	4 900 000	0.012302
5 000 000	5 000 000	0.012299
4 900 000	5 100 000	0.012297
4 800 000	5 200 000	0.012294
4 700 000	5 300 000	0.012292
4 600 000	5 400 000	0.012289
4 500 000	5 500 000	0.012286
4 400 000	5 600 000	0.012284
4 300 000	5 700 000	0.012281
4 200 000	5 800 000	0.012279
4 100 000	5 900 000	0.012276
4 000 000	6 000 000	0.012274
3 900 000	6 100 000	0.012271
3 800 000	6 200 000	0.012269
3 700 000	6 300 000	0.012267
3 600 000	6 400 000	0.012264
3 500 000	6 500 000	0.012262
3 400 000	6 600 000	0.012260
3 300 000	6 700 000	0.012257
3 200 000	6 800 000	0.012255
3 100 000	6 900 000	0.012253
3 000 000	7 000 000	0.012251
2 900 000	7 100 000	0.012249
2 800 000	7 200 000	0.012247
2 700 000	7 300 000	0.012245
2 600 000	7 400 000	0.012243
2 500 000	7 500 000	0.012241
2 400 000	7 600 000	0.012239
2 300 000	7 700 000	0.012238
2 200 000	7 800 000	0.012236
2 100 000	7 900 000	0.012234
2 000 000	8 000 000	0.012233
1 900 000	8 100 000	0.012231
1 800 000	8 200 000	0.012230
1 700 000	8 300 000	0.012228
1 600 000	8 400 000	0.012227
1 500 000	8 500 000	0.012226
1 400 000	8 600 000	0.012225
1 300 000	8 700 000	0.012224
1 200 000	8 800 000	0.012223
1 100 000	8 900 000	0.012222

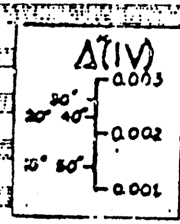
Πίναξ A

$N=(I)+(II)\cdot p^{2}+(III)\cdot p^{4}$ $E=500000+(IV)\cdot p+(V)\cdot p^{3}+A$

$p=(\lambda-\lambda_0)\cdot 10^{-4}$

LATITUDE	(I)	DIFF,1"	(II)	DIFF,1"	(III)	(IV)	DIFF,1"	(V)	DIFF,1"
38° 0'	443765,039	30,82601	3660,351	0,00885	1,960	243925,635	-0,92027	23,365	-0,00099
1	445596,600	30,82610	3660,880	0,00883	1,959	243870,244	-0,92061	23,305	-0,00099
2	447446,166	30,82618	3661,411	0,00881	1,958	243816,982	-0,92076	23,266	-0,00099
3	449293,737	30,82627	3661,940	0,00879	1,957	243759,485	-0,92130	23,186	-0,00099
4	451143,313	30,82636	3662,473	0,00877	1,955	243704,440	-0,92165	23,127	-0,00099
5	452992,896	30,82645	3662,998	0,00875	1,956	243649,147	-0,92199	23,067	-0,00099
6	454842,481	30,82654	3663,523	0,00872	1,955	243593,870	-0,92234	23,008	-0,00099
7	456692,073	30,82662	3664,047	0,00870	1,954	243538,482	-0,92268	22,949	-0,00099
8	458541,670	30,82671	3664,569	0,00868	1,953	243483,426	-0,92300	22,889	-0,00099
9	460391,273	30,82679	3665,090	0,00866	1,952	243427,769	-0,92337	22,830	-0,00099
10	462240,880	30,82688	3665,610	0,00864	1,951	243372,362	-0,92372	22,771	-0,00099
11	464090,493	30,82697	3666,129	0,00862	1,950	243316,849	-0,92406	22,711	-0,00099
12	465940,111	30,82706	3666,649	0,00860	1,949	243261,476	-0,92441	22,652	-0,00099
13	467789,735	30,82714	3667,162	0,00858	1,948	243206,044	-0,92475	22,593	-0,00099
14	469639,364	30,82723	3667,671	0,00856	1,947	243150,526	-0,92509	22,534	-0,00099
15	471488,997	30,82732	3668,190	0,00854	1,946	243095,021	-0,92546	22,474	-0,00099
16	473338,637	30,82741	3668,705	0,00852	1,945	243039,496	-0,92570	22,415	-0,00099
17	475188,281	30,82749	3669,214	0,00850	1,944	242983,960	-0,92618	22,356	-0,00099
18	477037,931	30,82758	3669,726	0,00848	1,943	242928,386	-0,92647	22,297	-0,00099
19	478887,586	30,82767	3670,233	0,00846	1,942	242872,792	-0,92681	22,238	-0,00099
20	480737,240	30,82776	3670,740	0,00844	1,941	242817,183	-0,92716	22,178	-0,00099
21	482586,911	30,82785	3671,249	0,00842	1,940	242761,556	-0,92750	22,119	-0,00099
22	484436,582	30,82793	3671,751	0,00840	1,939	242705,906	-0,92786	22,060	-0,00099
23	486286,258	30,82802	3672,255	0,00838	1,938	242650,233	-0,92819	22,001	-0,00098
24	488135,939	30,82811	3672,757	0,00835	1,937	242594,542	-0,92855	21,942	-0,00098
25	489985,626	30,82820	3673,259	0,00833	1,936	242538,830	-0,92887	21,883	-0,00098
26	491835,317	30,82828	3673,759	0,00831	1,935	242483,097	-0,92922	21,824	-0,00098
27	493685,016	30,82837	3674,258	0,00829	1,934	242427,364	-0,92956	21,765	-0,00098
28	495534,717	30,82846	3674,755	0,00827	1,934	242370,574	-0,92990	21,706	-0,00098
29	497384,424	30,82855	3675,251	0,00825	1,933	242315,776	-0,93025	21,647	-0,00098
38° 30'	499234,137		3675,747		1,932	242259,962		21,588	



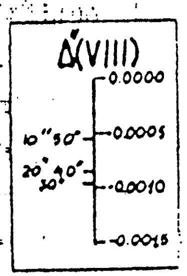


Πίναξ Β

φ=φ₁+(VI)*Q**2+(VII)*Q**4 λ=λ₀+(VIII)*Q+(IX)*Q**3+(X)*Q**5

Q=(E-2V0000)*10**-6

LATITUDE	(VI)	DIFF,1"	(VII)	(VIII)	DIFF,1"	(IX)	DIFF,1"	(X)
38° 0'	-1984,783	-0,01971	27.64	60996,1347	0.15470	-372,921	-0,00548	6.38
1	-1985,966	-0,01972	27.67	61005,4169	0.15483	-373,252	-0,00549	6.39
2	-1987,149	-0,01973	27.69	61014,7068	0.15496	-373,581	-0,00550	6.40
3	-1988,333	-0,01974	27.72	61024,0043	0.15509	-373.911	-0,00550	6.41
4	-1989,518	-0,01975	27.74	61033,3096	0.15522	-374.241	-0,00551	6.42
5	-1990,703	-0,01976	27.77	61042,6226	0.15536	-374.572	-0,00552	6.43
6	-1991,888	-0,01977	27.79	61051,9433	0.15547	-374.903	-0,00553	6.44
7	-1993,076	-0,01978	27.82	61061,2717	0.15560	-375.235	-0,00553	6.45
8	-1994,261	-0,01978	27.84	61070,6078	0.15573	-375.567	-0,00554	6.46
9	-1995,448	-0,01979	27.87	61079,9517	0.15586	-375.899	-0,00555	6.47
10	-1996,635	-0,01980	27.89	61089,3033	0.15599	-376.232	-0,00556	6.48
11	-1997,826	-0,01981	27.92	61098,6627	0.15612	-376.566	-0,00556	6.49
12	-1999,012	-0,01982	27.94	61108,0298	0.15625	-376.900	-0,00557	6.50
13	-2000,201	-0,01983	27.97	61117,4047	0.15638	-377.234	-0,00558	6.51
14	-2001,391	-0,01984	28.00	61126,7876	0.15651	-377.569	-0,00559	6.52
15	-2002,582	-0,01985	28.02	61136,1778	0.15664	-377.904	-0,00559	6.53
16	-2003,772	-0,01986	28.05	61145,5760	0.15677	-378.239	-0,00560	6.54
17	-2004,964	-0,01987	28.07	61154,9821	0.15690	-378.575	-0,00561	6.55
18	-2006,156	-0,01987	28.10	61164,3959	0.15703	-378.912	-0,00562	6.56
19	-2007,348	-0,01988	28.12	61173,8175	0.15716	-379.249	-0,00562	6.57
20	-2008,541	-0,01989	28.15	61183,2469	0.15729	-379.586	-0,00563	6.58
21	-2009,735	-0,01990	28.18	61192,6862	0.15742	-379.924	-0,00564	6.59
22	-2010,929	-0,01991	28.20	61202,1292	0.15755	-380.263	-0,00565	6.61
23	-2012,124	-0,01992	28.23	61211,5821	0.15768	-380.601	-0,00565	6.62
24	-2013,319	-0,01993	28.25	61221,0429	0.15781	-380.941	-0,00566	6.63
25	-2014,514	-0,01994	28.28	61230,5115	0.15794	-381.280	-0,00567	6.64
26	-2015,711	-0,01995	28.31	61239,9879	0.15807	-381.620	-0,00568	6.65
27	-2016,908	-0,01996	28.33	61249,4722	0.15820	-381.961	-0,00568	6.66
28	-2018,105	-0,01997	28.36	61258,9644	0.15833	-382.302	-0,00569	6.67
29	-2019,303	-0,01997	28.38	61268,4666	0.15847	-382.644	-0,00570	6.68
38° 30'	-2020,501		28.41	61277,9724		-382.986		6.69



LATITUDE	(X1)	[illegible]	(X11)
30° 0	6156.615	0.03820	3.033
1	6158.907	0.03819	3.033
2	6161.190	0.03818	3.033
3	6163.489	0.03817	3.032
4	6165.780	0.03816	3.032
5	6168.064	0.03815	3.032
6	6170.359	0.03815	3.031
7	6172.648	0.03814	3.031
8	6174.936	0.03813	3.031
9	6177.224	0.03812	3.030
10	6179.511	0.03811	3.030
11	6181.798	0.03810	3.030
12	6184.084	0.03810	3.030
13	6186.370	0.03809	3.029
14	6188.655	0.03808	3.029
15	6190.939	0.03807	3.029
16	6193.224	0.03806	3.028
17	6195.507	0.03805	3.028
18	6197.790	0.03804	3.028
19	6200.073	0.03803	3.028
20	6202.355	0.03803	3.027
21	6204.636	0.03802	3.027
22	6206.917	0.03801	3.027
23	6209.198	0.03800	3.026
24	6211.478	0.03799	3.026
25	6213.757	0.03798	3.026
26	6216.036	0.03797	3.025
27	6218.314	0.03796	3.025
28	6220.592	0.03796	3.025
29	6222.870	0.03795	3.025
30° 30	6225.146	[illegible]	3.024

Πίναξ Δ

g=(Y(I))+0.5(X(V))+0.+)

G0(E-200000)/F0...

LATITUDE		(X(I))	DIFF, 1''	(X(V))
30°	0	25239,741	0,2519	-331,5
	1	25254,854	0,2520	-331,8
	2	25269,974	0,2521	-332,2
	3	25285,100	0,2522	-332,5
	4	25300,234	0,2523	-332,9
	5	25315,376	0,2525	-333,2
	6	25330,522	0,2526	-333,6
	7	25345,676	0,2527	-333,9
	8	25360,837	0,2528	-334,3
	9	25376,005	0,2529	-334,6
	10	25391,180	0,2530	-335,0
	11	25406,362	0,2531	-335,4
	12	25421,551	0,2533	-335,7
	13	25436,746	0,2534	-336,1
	14	25451,949	0,2535	-336,4
	15	25467,159	0,2536	-336,8
	16	25482,375	0,2537	-337,1
	17	25497,599	0,2538	-337,5
	18	25512,829	0,2540	-337,8
	19	25528,067	0,2541	-338,2
	20	25543,311	0,2542	-338,6
	21	25558,563	0,2543	-338,9
	22	25573,821	0,2544	-339,3
	23	25589,087	0,2545	-339,6
	24	25604,359	0,2547	-340,0
	25	25619,639	0,2548	-340,4
	26	25634,925	0,2549	-340,7
	27	25650,219	0,2550	-341,1
	28	25665,520	0,2551	-341,4
	29	25680,827	0,2552	-341,8
30°	30	25696,142		-342,2

Πίναξ Ε

F=F0+(XVI)*n**2

n=(λ-λ0)*10**-4

F0=0.9990

LATITUDE		(XVI)	LATITUDE		(XVI)	LATITUDE		(XVI)	LATITUDE		(XVI)
34°	0'	0.00081138	36°	0'	0.00077250	38°	0'	0.00073274	40°	0'	0.00069230
	10	0.00080818		10	0.00076922		10	0.00072939		10	0.00068890
	20	0.00080497		20	0.00076593		20	0.00072601		20	0.00068551
	30	0.00080175		30	0.00076263		30	0.00072268		30	0.00068211
	40	0.00079853		40	0.00075933		40	0.00071932		40	0.00067870
	50	0.00079530		50	0.00075603		50	0.00071596		50	0.00067529
35°	0	0.00079206	37°	0	0.00075272	39°	0	0.00071259	41°	0	0.00067189
	10	0.00078882		10	0.00074940		10	0.00070922		10	0.00066847
	20	0.00078557		20	0.00074608		20	0.00070586		20	0.00066506
	30	0.00078231		30	0.00074275		30	0.00070244		30	0.00066164
	40	0.00077904		40	0.00073942		40	0.00069908		40	0.00065822
	50	0.00077577		50	0.00073608		50	0.00069560		50	0.00065480
36°	0'	0.00077250	38°	0'	0.00073274	40°	0'	0.00069230	42°	0'	0.00065138

F=F0+(XVII)*Q**2 F_s=F0+(XVII)*(Q1**2+Q1*Q2+Q2**2)/3 δ_N=(XVIII)*(2*Q1+Q2)*(N2-N1)*10**-6

Q=(E-200000)*10**-6

NORTHING	(XVII)	NORTHING	(XVIII)
0.	0.0123259	0.	847.556
100000.	0.0123235	100000.	847.388
200000.	0.0123211	200000.	847.219
300000.	0.0123186	300000.	847.049
400000.	0.0123161	400000.	846.878
500000.	0.0123136	500000.	846.705
600000.	0.0123111	600000	846.531
700000.	0.0123085	700000.	846.355
800000.	0.0123059	800000.	846.179
900000.	0.0123034	900000.	846.002

ΤΡΙΔΙΑΣΤΑΤΗ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ

- Κλασσική Γεωδαισία → μετράμε S, A αναγμένα στο ελλειψοειδές αναφοράς

- Δορυφορική Γεωδαισία (GPS) → μετράμε ΔX, ΔY, ΔZ αναγμένα σε γεωκεντρικό (συνήθως ψευτογεωκεντρικό) σύστημα αναφοράς προσανατολισμένο σε παγκόσμιο γεωδαιτικό (δορυφορικό) σύστημα αναφοράς (π.χ. WGS'84)

- Αν X, Y, Z, οι συντεταγμένες του σημείου 1 στο γεωδαιτικό σύστημα αναφοράς εργασίας παράλληλο με το δορυφορικό σύστημα αναφοράς με την απαιτούμενη ακρίβεια

$$X_2 = X_1 + \Delta X, \quad Y_2 = Y_1 + \Delta Y, \quad Z_2 = Z_1 + \Delta Z$$

★ Αυτό ισχύει για το ΕΓΣΑ'87 και το WGS'84 (ακρίβεια καλύτερη από 10^{-6})

- Συνήθως οι συντεταγμένες δίνονται σε φ, λ, h τότε

$$\underset{\text{δίδεται}}{\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \\ h_1 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{pmatrix} + \underset{\text{μετρήθηκε}}{\begin{pmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ Z_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underset{\text{ζητείται}}{\begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \lambda_2 \\ h_2 \end{pmatrix}}$$

- Ιστορικό του μαθήματος
- Σκοπός — περιεχόμενο
- Γιατί σημασία οι υπολογισμοί
- Γιατί η ανάγκη για το μάθημα
- Χαρακτήρας του μαθήματος (εφαρμογή/λίγη θεωρία/υπολ…
- Γενικές αρχές για τους υπολογισμούς — πράξεις.
  - log → αριθμομηχανές → Η/Υ (nested)
    αίσθηση των πράξεων (κλασικός σχέσης – σχέσεις
  - απαιτούμενη ακρίβεια (όχι περιττά)
    μμ 1m 1dm 1cm 1mm αλλά και 10m 100m 1km
  - αριθμητική ακρίβεια. αριθμός ψηφίων. (sin tan
  - σχέση με ακρίβειας των μετρήσεων
    Τάξεις μεγέθους

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ & ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

Σκοπός: Να δώσει τις απαραίτητες γνώσεις

- για <u>υπολογισμούς θέσεων</u> στο ελλειψοειδές και στην προβολή

  καθώς και

- για <u>μετατροπές συντεταγμένων</u> μεταξύ διαφόρων συστημάτων αναφοράς

Έμφαση στο τι γίνεται στην Ελλάδα.

Υλη:

- Γεωμετρία ελλειψοειδούς *
- Γεωδαιτικοί υπολογισμοί στο ελλειψοειδές
- Απεικονίσεις · Παραμορφώσεις
- Τι χρησιμοποιείται στην Ελλάδα
- Γεωδαιτικά Συστήματα Αναφοράς
- Τι χρησιμοποιείται στην Ελλάδα

	a	e^2	$1/f$	b	e'^2
Bessel					
Hayford					
* GRS 80 (WGS 84)					
WGS 72					

GRS 80

$a = 6\,378\,137.000$

$e^2 = 0.006\,694\,380\,023$

$1/f = 298.257\,222\,101$

J_2 $\cancel{e'^2 =}$

$b = 6\,356\,752.314$

$e'^2 = 0.006\,739\,496\,775$

$R_S = 6\,371\,007.181$

$R_V = 6\,371\,000.790$

$R_M = 6\,371\,008.770$

(J_2 $108\,263 \times 10^{-8}$

Bessel

$a = 6\,377\,397.155$ $e^2 = 0.006\,674\,372$

Hayford

$a = 6\,378\,388.000$ $e^2 = 0.006\,722\,670$

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ (ΕΚ ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗΣ)

→ (Κλασική Γεωδαισία)

+ Γιατί? πλησίον θαλάσσης, a f ύψος βουνών.

• **παραμ.** | a b $f = \frac{a-b}{a}$ $e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}$ $e'^2 = \frac{a^2-b^3}{b^2}$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

• **συντ.** || φ, λ (και h) τι είναι (ψ γεωκ

- **καμπυλότητες** || υπάρχουν δύο κύριες (άπειρες σε A)

$$\cdot\ \rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \qquad N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} \qquad (r = N\cos$$

$$\frac{N}{\rho} = 1 + e'^2\cos^2\varphi = 1+\eta^2, \qquad N\rho = \rho^2(1+\eta^2) = N^2\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

$$R_A = \frac{\cos^2 A}{\rho} + \frac{\sin^2 A}{N} \qquad K_A = K_M\cos^2 A + K_N\sin^2 A$$

$$R = R_M = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_A\, dA = \sqrt{\rho N} = \rho\sqrt{1+\eta^2}$$

- **γραμμές** || • γεωδαισιακή (αλλά και κάθετη + χορδή!)
τι είναι πώς υπολογίζεται

• Μεσημβρινό (γεωδαισιακή) μήκος της

$$M = a(1-e^2)\left[M_0\varphi - M_2\sin 2\varphi + M_4\sin 4\varphi - M_6\sin 6\varphi + \dots\right.$$

Γιατι ελλειψοειδες εκ περιστροφής.

Πως οριζεται : $a, b, f = \frac{a-b}{a}, e^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2}, e'^2 = \frac{a^2-b^2}{b^2}$

Θεση στο ελλειψοειδες : $\varphi, \lambda\ (h)$. αλλά και X, Y, Z

Εξίσωση : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{a^2} + \frac{Z^2}{b^2} = 1$

- Καμπυλότητες : Σε καθε σημειο διαφορετικές σε καθε διευθυνση (Αζιμουθιο) R_A αλλα υπάρχουν δυο κυρι

• σε μεσημβρινο $\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$ • σε καθετο $N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$ ⇒

$$\frac{N}{\rho} = 1 + e'^2\cos^2\varphi = 1+\eta^2,\ N\rho = \rho^2(1+\eta^2) = N^2\frac{1-e^2}{1-e^2\sin^2\varphi}$$

• $R_A = \frac{\rho N}{N\cos^2 A + \rho\sin^2 A}$ ή $\frac{1}{R_A} = \frac{\cos^2 A}{\rho} + \frac{\sin^2 A}{N}$

• Μεση ακτινα $R = R_\mu = \bar{R} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R_A\, dA = \sqrt{\rho N} = \rho\sqrt{1+\eta^2}$

• Γραμμες στο ελλειψοειδες : Υπαρχουν απειρες αλλά:

  • γεωδαισιακή γραμμή (η γραμμή με το μικροτερο μηκ

    $N\cos\varphi\sin A = \text{σταθερο} = a\sin A_0$

  • καθετη τομή.
  • χορδή

✱ Ακτινα καμπυλοτητας μικρου κυκλου $r = N\cos\varphi$

$$a \sim b \sim R \sim 6 \cdot 10^{6}\,m \sim 6 \times 10^{9}\,mm \qquad (e, N)$$

$$f = \sim \frac{1}{300} \sim 0.030 \sim 30 \times 10^{-3}$$

$$e^2 \sim e'^2 \sim 2f \sim \frac{1}{150} \sim 0.066 \sim 66 \times 10^{-3}$$

$e^4 \sim 44$
$e^6 \sim 300$
$e^8 \cdot 2$
e^{10} 13

στην επιφάνεια της γης

$1^\circ \sim 110$ km (100)
$1' \sim 1.8$ km (2)
$1'' \sim 30$ m (30)

1 Mm $\sim 9^\circ.1$
1 km $\sim 0^\circ.54 \sim 32''$
1 m $\sim 0''.032$
1 cm $0''.00032$
1 mm $0''.000032$

$$\boxed{1'' \simeq \frac{1}{200\,000} = 5 \times 10^{-6} \quad \Big|\quad 10^{-6}\,(=1\,\mu rad) \sim 0''.2 \quad 10^{-3}\,(=1\,mrad) \sim 3'}$$

Επίσης πλευρά τριγωνισμού Ι^{ης} τάξης ~ 60 km $= 0.01\,R$

$$\Big(\text{άρα } \frac{s}{R} \sim \frac{s}{a} \sim \frac{s}{b} \sim 10^{-2}$$

$$\frac{s}{a} \quad \frac{s}{\rho} \Big/ \frac{s}{N} \Big/ \left(\frac{s}{R}\right)^2 \sim 10^{-4}$$

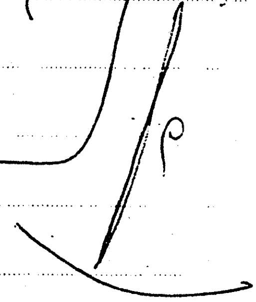
$$\left(\frac{s}{R}\right)^3 \sim 10^{-6}$$

$$\sin E = \frac{1-\cos^2\frac{x}{2}}{1+\cos^2\frac{x}{2}}$$

10°
15°
20° → 0.9
25° 2°
30°

$$m_n = \frac{d\rho}{R\,d\chi} \qquad m_p = \frac{\rho\cos\chi_0}{R\sin\chi_p}$$

r N



$$\int \rho\, d\rho = \frac{R^2}{\cos\chi_0}\int \sin x\, dx$$

$$\rho = -\frac{R}{\cos\chi_0}\cos\chi$$

$x = x_0 \to \rho = R\tan x_0$

$$\rho = C - \cancel{R}\frac{\cos x}{\cancel{\cos\chi_0}\,\cos\chi_0}$$

$\rho = C - R$

$C = \rho + R = R\tan x + R$

$$\cancel{\rho = R\tan\chi_0 - R\frac{\cos x}{\cos x_0}}$$

$$C = R\tan\chi_0 + R = R(\tan x + 1)$$

$$\rho = R(\tan\chi_0 - 1) - R\left(\frac{\cos x}{\cos x_0}\right)$$

$$R\left(\tan\chi_0 - \frac{\cos x}{\cos x_0} - 1\right)$$

ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΗ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

Bessel : $a = 6377\,397.155$ m $\quad e^2 = 0.006\,674\,372$

Hayford : $a = 6\,378\,388.000$ m $\quad e^2 = 0.006\,722\,670$

GRS 80: $a = 6\,378\,137.000$ m $\quad e^2 = 0.006\,694\,380$

$b = 6\,356\,752.314$ m $\quad e'^2 = 0.006\,739\,497$

$1/f = 298.257\,222\,101$

$\mathcal{M} = 10\,001\,965.729$ m

$R_S = 6\,371\,007.181$ m, $R_V = 6\,371\,000.790$

Τάξεις μεγέθους

- $a \sim b \sim R \sim \rho \sim N \sim 6\,000$ km ή $6 \cdot 10^6$ m ή $6 \cdot 10^9$ m
- $f \sim \frac{1}{300} \sim 0.0033$ ή 3.3×10^{-3}
- $e^2 \sim e'^2 \sim 2f \sim \frac{1}{150} \sim 0.0066$ ή 6.6×10^{-3}

  ($e^4 \sim 44 \times 10^{-6}$, $e^6 \sim 300 \times 10^{-9}$, $e^8 \sim 2 \times 10^{-9}$, $e^{10} \sim 13 \times 10^{-12}$)
- Στην επιφάνεια της γης :

  $1° \simeq 110$ km , $1' \simeq 1.9$ km , $1'' \simeq 31$ m

  1 Mm $\simeq 9°$, 1 km $\sim 0'.54 \sim 32''$, 1 m $\sim 0''.032$
- πλευρές τριγωνισμού Ι^ης τάξεως ~ 60 km $\sim 0.01R$

  $\frac{S}{R} \sim 10^{-2}$ (600 m), $\left(\frac{S}{R}\right)^2 \sim 10^{-4}$ (6 m), $\left(\frac{S}{R}\right)^3 \sim 10^{-6}$ (6 cm)
- πλευρές τριγωνισμού ΙΙΙ^ης τάξεως ~ 6 km $\sim 0.001R$

  $\frac{S}{R} \sim 10^{-3}$ (6 m), $\left(\frac{S}{R}\right)^2 \sim 10^{-6}$ (6 mm), $\left(\frac{S}{R}\right)^3 \sim 10^{-9}$ (6 μ)

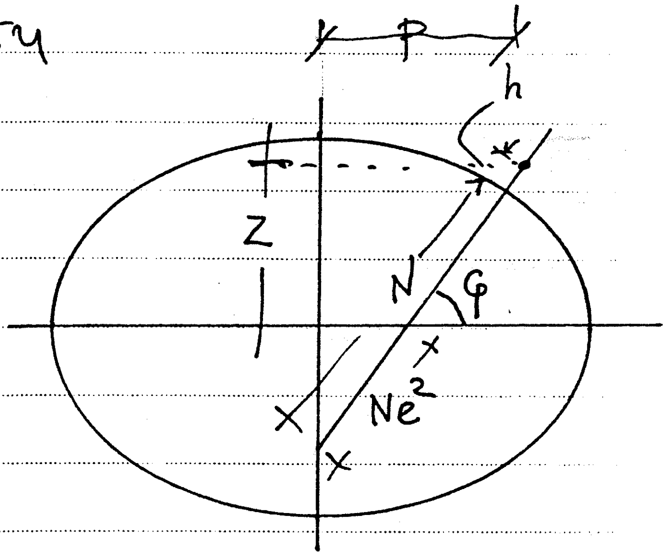
[illegible]

$\boxed{\text{Συντεταγμένες}}$

$$\varphi, \lambda, h\,(H)$$

Χρήση Καρτεσιανών X Y Z

Μαθηματική σχέση



$$X = (N+h)\cos\varphi\cos\lambda$$
$$Y = (N+h)\cos\varphi\sin\lambda$$
$$Z = \left[N(1-e^2)+h\right]\sin\varphi$$

$$P = \sqrt{X^2+Y^2} = (N+h)\cos\varphi$$

$$\left(N = \frac{a}{\sqrt{1-e^2\sin^2\varphi}}\right)$$

Αντίστροφο

$$\tan\lambda = \frac{Y}{X}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z}{P}\,\frac{N+h}{N(1-e^2)+h} \qquad \Bigg| \qquad \tan\varphi = \frac{Z + e^2 N\sin\varphi}{P}$$

$$h = \sqrt{(Ne^2\sin\varphi + Z)^2 + P^2} - N \qquad \Bigg| \qquad h = \frac{P}{\cos\varphi} - N$$

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΜΕΣΗΜΒΡΙΝΟΥ

$$dM = \rho \, d\varphi$$

$$M_0^{\varphi} = \int_0^{\varphi} \rho \, d\varphi = a(1-e^2) \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1-e^2 \sin^2\varphi)^{3/2}}$$

(ανάπτυγμα σε σειρά)*

$$M = a(1-e^2)\left[M_0 \varphi - M_2 \sin 2\varphi + M_4 \sin 4\varphi - \ldots \ldots\right]$$

$$M_0 = 1 + \frac{3}{4} e^2 + \frac{45}{64} e^4 + \frac{175}{256} e^6 + \frac{11025}{16384} e^8 + \ldots$$

$$M_2 = \frac{3}{8} e^2 + \frac{15}{32} e^4 + \frac{525}{1024} e^6 + \frac{2205}{4096} e^8 + \ldots$$

$$M_4 = \frac{15}{256} e^4 + \frac{105}{1024} e^6 + \frac{2205}{8820} e^8 + \ldots$$

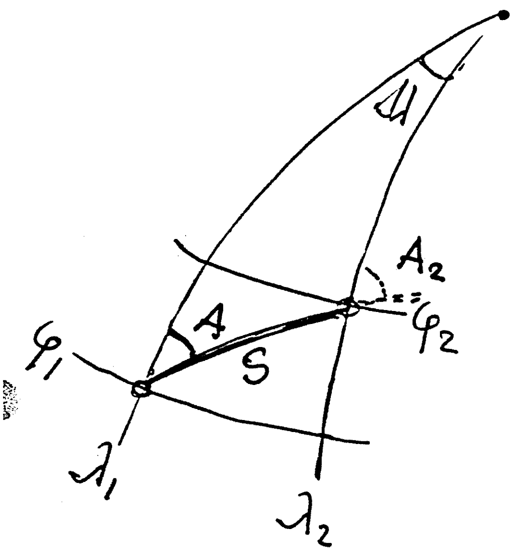
$$M_6 = \frac{35}{3072} e^6 + \frac{315}{12288} e^8 + \ldots$$

$$M_8 = \frac{315}{130784} e^8 + \ldots$$

$$* \; (1-\varepsilon)^{-n} = 1 + n\varepsilon + \frac{n(n+1)}{2!}\varepsilon^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{3!}\varepsilon^3 + \ldots$$

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ

(8° φυλ. § 8.4.1)

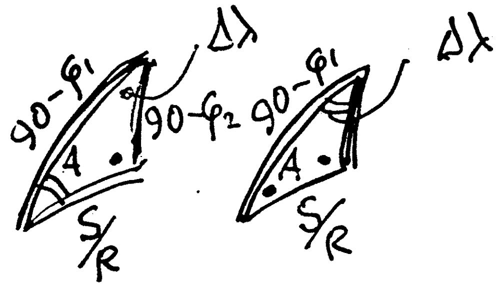


$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} S \\ A \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \lambda_1 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varphi_2 \\ \lambda_2 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} S \\ A \end{Bmatrix}$$

(γεωγραφικές συντεταγμένες) $\rightleftarrows$ (πολικές συντεταγμένες)

* Αν σφαίρα τότε σφαιρική τριγωνομετρία

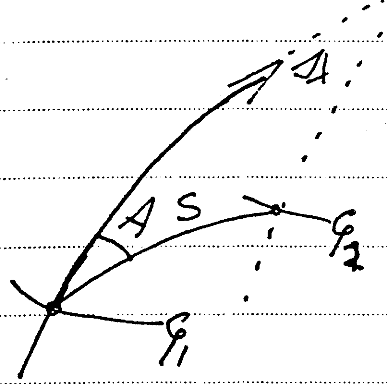


Σημ. Το τρίγωνο πολύ στενόμακρο (~1:100)

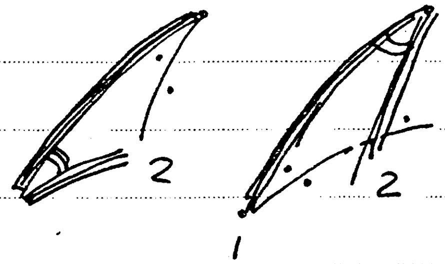
Γεωδαιτικη Μεταφορα (8° φυλλαδιο)

Συντεταγμενες / μηκη + γωνιες.
πολικες συντεταγμενες (τοπ

σχεση $\begin{pmatrix}\varphi\\ \lambda\end{pmatrix} \rightleftarrows \begin{pmatrix}S\\ A\end{pmatrix}$



επιπεδο = (θεμελιωδη)
σφαιρα = σφ. τριγ.



(το τριγωνο πολυ στενομακρο)

ελλειψοειδες

2 καθετη τομη / γεωδαισιακη γραμμη $\left(0''.017\left(\frac{S_{km}}{100}\right)^2 \sin\right.$
1 μεταβλητη καμπυλοτητα
ακριβεια που μετραει

(φ,λ) $0''.001 \triangleq 3\,cm$ (A) $0''.01 \triangleq 1\,cm$
$0''.0001 \triangleq 3\,mm$ (για 200km)

αφου γωνια με $0''.3$ για 20km $0''.1 \triangleq 1\,cm$

Ⓐ Περίπτωση χρήσης σφαίρας

$$R_m = \sqrt{\rho_m N_m}$$ φ(μέσο) Gauss ή Εγγύτατη

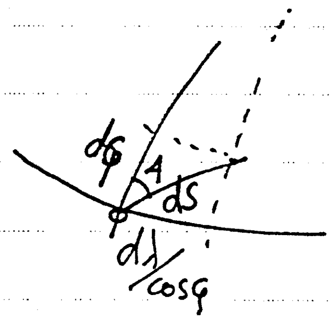
ή αλλιώς ρ για τα πλάτη
N για τα μήκη + Αζιμούθια

Ⓑ Ανάπτυγμα απ' ευθείας σε σειρά ως

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) s + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right) s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\varphi}{\partial s^3}\right) s^3 + \dots$$

$$\Delta\lambda = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial s}\right) s + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\lambda}{\partial s^2}\right) s^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3\lambda}{\partial s^3}\right) s^3 + \dots$$

$$\Delta A = \left(\frac{\partial A}{\partial s}\right) s + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 A}{\partial s^2}\right) s^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\partial^3 A}{\partial A^2}\right) s^3 + \dots$$



$$\rho\, d\varphi = ds \cos A$$
$$r\, d\lambda = ds \sin A = N\cos\varphi\, d\lambda$$

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{1}{\rho}\cos A \qquad \frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{N\cos\varphi}\sin A$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho_1} S_{12}\cos A_{12} - \frac{1}{2N_1\rho_1}\tan\varphi_1\, S_{12}^2 \sin^2 A_{12} + \dots$$

$$\Delta\lambda = \frac{1}{N_1\cos\varphi_1} S_{12}\sin A_{12} + \frac{1}{N_1^2\cos\varphi_1}\tan\varphi_1\, S_{12}^2 \sin A_{12}\cos A_{12} + \dots$$

$$\Delta A = \frac{1}{N_1}\tan\varphi_1\, S_{12}\sin A_{12} + \dots$$

Α) Περίπτωση χρήσης σφαίρας

$$R_m = \sqrt{\rho_m N_m}$$ φ(μέσο) Gauss ή Εγγύτατη

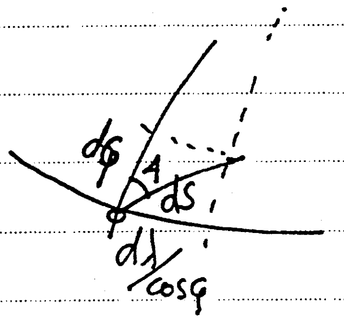
ή αλλιώς ρ για τα πλάτη
N για τα μήκη + Αζιμούθια

2) Ανάπτυγμα απ' ευθείας σε σειρά ως

$$\Delta\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right) s + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial s^2}\right) s^2 + \frac{1}{3!}\left(\cdots \right.$$

$$\Delta\lambda = \cdots$$

$$\Delta A =$$



$$\rho\, d\varphi = dS \cos A$$
$$r\, d\lambda = dS \sin A = N \cos\varphi\, d\lambda$$

$$\Delta\varphi = \frac{1}{\rho_1} S_{12} \cos A_{12} - \frac{1}{2N_1\rho_1} \tan\varphi_1\, S_{12}^2 \sin^2 A_{12} + \cdots$$

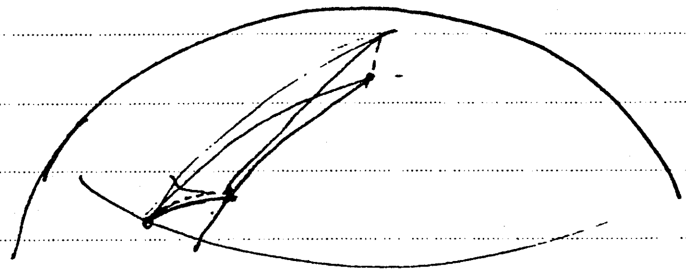
$$\Delta\lambda = \frac{1}{N_1 \cos\varphi_1} S_{12} \sin A_{12} + \frac{1}{N_1^2 \cos\varphi_1} \tan\varphi_1\, S_{12}^2 \sin A_{12} \cos A_{12} + \cdots$$

$$\Delta A = \frac{1}{N_1} \tan\varphi_1\, S_{12} \sin A_{12} + \cdots$$

c) Γεωμετρική προσέγγιση – Puissant

1. Υπολογισμός φ_2

α σφαίρα που εφαπτ. φ_1 (ακτίνα N_1)
β. υπολογισμός φ_2 στη σφαίρα μέσω αναγωγής σε σφαιρ.
γ. αναγωγή σε κύκλο ρ_m (άρα $\sim \Delta\varphi$)



2. Υπολογισμός λ_2

α. σφαίρα που εφάπτεται στο φ_2 (τώρα γνωστό)
β επίλυση στη σφαίρα του δλ.. $\Delta\lambda$
γ αναγωγή σε σφαιρα (όχι απαραίτητο

3. Υπολογισμός A_{21}
α σφαίρα που εφάπτεται στο φ_2
β επίλυση στη σφαίρα (αναλογίες Napier)
γ αναγωγή σε σφαιρ.

D) Ολοκλήρωση γεωδαισιακής γραμμής.

τύποι Rainsford - Vincenty

Γεωδαισιακή γραμμή

Clairaut: $r \sin A = c = a \sin A_0$

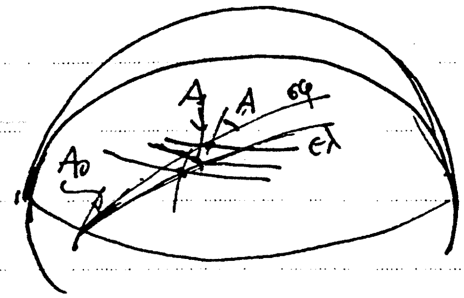
$$N \cos\varphi \sin A = a \sin A_0$$

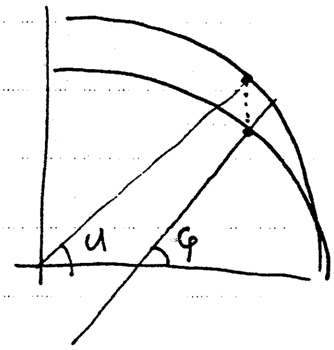
$$\sin A = a \sin A_0 \frac{1}{N \cos\varphi}$$

Καμπυλότητα:

$$R_\gamma = \frac{\rho}{1 - e'^2 \sin^2 A_0}$$

Χρήση περιβάλλουσας σφαίρας





έλλειψ.		σφαίρα	
	ίδιο A_0		
φ	γιά ίδιο A.	u	(γιά Clairaut
λ	→ μεγαλύτ.	λ'	
s	→ μεγαλυτ.	σ	

$(dA = d\lambda \sin\varphi = d\lambda' \sin u)$ $\quad \varphi > u \Rightarrow d\lambda' > d\lambda$

E)

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda + f \sin A_o \sigma + \dots$$

$$\Delta\lambda' > \Delta\lambda$$

(γιά $\sigma = 360°$ $\Delta\lambda' - \Delta\lambda = f \sin A_o \cdot 360°$)

$$\sigma = \frac{S}{A \cdot b} + \Delta\sigma$$

$$\Delta\sigma = \frac{1}{4} e'^2 \cos^2 A_o \cos 2\sigma_m \sin\sigma + \dots$$

ΤΥΠΟΙ PUISSANT

$$\Delta\varphi = B \cdot S\cos A - C S^2 \sin^2 A - E(B S\cos A) S^2 \sin^2 A - D(\Delta\varphi''_0)^2$$

$$B = \frac{1}{\rho_1 \operatorname{arc}1''} \qquad \sim 3240 \quad \text{arcsec}/100\,\text{km}$$

$$C = \frac{\tan\varphi_1}{2N_1\rho_1 \operatorname{arc}1''} \qquad \sim 20 \quad \text{arcsec}/(100\,\text{km})^2$$

$$D = \frac{3}{2}\cdot\frac{e^2\sin\varphi_1\cos\varphi_1}{1-e^2\sin^2\varphi_1}\operatorname{arc}1'' \qquad \sim 2. \quad \text{arcsec}/(10000\,\text{arcsec})^2$$

$$E = \frac{1+3\tan^2\varphi_1}{6N_1^2} \qquad \sim 0.000! \quad 1/(100\,\text{km})^2$$

$$\Delta\lambda = A S\sin A\sec\varphi_2 - (G S^2 + H S^2\sin^2 A) S\sin A\sec\varphi_2$$

$$A = \frac{1}{N_2 \operatorname{arc}1''} \qquad \sim 3230 \quad \text{arcsec}/100\,\text{km}$$

$$G = \frac{A}{6N_2^2} \qquad \sim 0.1 \quad \text{arcsec}/(100\,\text{km})^3$$

$$H = \frac{G}{\cos^2\varphi_2} \qquad \sim 0.2 \quad \text{arcsec}/(100\,\text{km})^3$$

$$\Delta A = \Delta\lambda \sin\varphi_m \sec\frac{\Delta\varphi}{2} + F(\Delta\lambda)^3$$

$$F = \frac{1}{12}\sin\varphi_m\cos^2\varphi_m \operatorname{arc}^2 1'' \qquad \sim 0.7 \quad \text{arcsec}/(10\,\text{arcsec})^3$$

Απ' ευθείας υπολογισμός Δλ

$$\sin \Delta\lambda = \sin\frac{S}{N_2} \cdot \frac{\sin A}{\cos\varphi_2}$$

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ.

$$S_{12}\sin A_{12} \approx \frac{1}{A_2}\cos\varphi_2\,\Delta\lambda\left(1+\frac{S_{12}^2}{6N_2^2}-\frac{\Delta\lambda^2}{6}\right)$$

$$S_{12}\cos A_{12} = \frac{1}{B_m}\Delta\varphi + \frac{C_m}{B_m}\left(S_{12}\sin A_{12}\right)^2 + E\left(S_{12}\sin A_{12}\right)^2\left(S_{12}\cos A_{12}\right)$$

$$\tan A_{12} = \frac{X}{Y}$$

$$S_{12} = \sqrt{X^2+Y^2}$$

D) Ολοκλήρωση γεωδαισιακής γραμμής.

τύποι Rainsford - Vincenty

Γεωδαισιακή γραμμή:

Clairaut: $r\sin A = c = a\sin A_0$

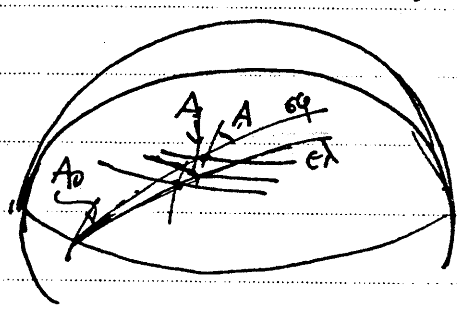
$$N\cos\varphi \sin A = a\sin A_0$$

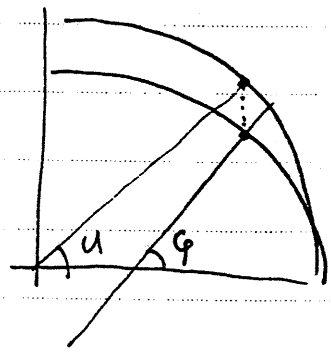
$$\sin A = a\sin A_0 \frac{1}{N\cos\varphi}$$

Καμπυλότητα:

$$R_\gamma = \frac{\rho}{1-e'^2\sin^2 A_0}$$

Χρήση περιβάλλουσας σφαίρας





ελλειψ.		σφαίρα	
	ίδιο A_0		
φ	γιά ίδιο A.	u	(γιά Clairaut)
λ	→ μεγαλύτ.	λ'	
s	→ μεγαλύτ.	σ	

$(dA = d\lambda \sin\varphi = d\lambda' \sin u)$ $\quad \varphi > u \Rightarrow d\lambda' > d\lambda$

E)

$$\Delta\lambda' = \Delta\lambda + f \sin A_0 \sigma + \ldots$$

$$\Delta\lambda' > \Delta\lambda$$

γιά $\sigma = 360^\circ$ $\Delta\lambda' - \Delta\lambda = f \sin A_0 \cdot 360^\circ$

$$\sigma = \frac{S}{A \cdot b} + \Delta\sigma$$

$$\Delta\sigma = \frac{1}{4} e'^2 \cos^2 A_0 \cos 2\sigma_m \sin\sigma + \ldots$$

A

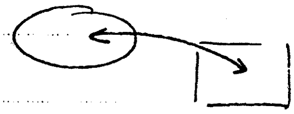
ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΩΝ

(Γενική Χαρτογραφία)

Δυσκολία υπολογισμών στο ελλειψοειδές
Ευκολία στο επίπεδο
Άρα αν απεικονίσουμε ελλειψ → επιπ.
Οι απεικονίσεις και η χαρτογραφία
οριζοντιογραφικό [illegible]

Η εξέταση του θέματος για γεωδαισία

Μαθηματικό πρόβλημα (όχι φυσικό)
αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία
γεωμετρικά ≠ αναλυτικά (προβολή!!)



Αφού το ελλειψοειδές δεν είναι αναπτυκτή επιφάνεια
άρα παραμορφώσεις (των γεωμ. μεγεθών)

μήκη
γωνίες
(διευθύνσεις)
εμβαδά.

κλίμακα $\frac{s}{S}$

Τι εξετάζετε?

+ θέση

$(\varphi\ \lambda)$

$\downarrow\uparrow$

$(X\ Y)$

+ παραμορφώσεις

$S \rightleftarrows s$ $\quad E \rightleftarrows \varepsilon$

$B \rightleftarrows \beta$ $\quad A \rightleftarrows \alpha$.

B)

ΘΕΣΗ

ανάλογα συντεταγμένες (φ, λ) (x, y)

$$\begin{Bmatrix} \varphi \\ \lambda \end{Bmatrix} \rightleftarrows \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} \rightleftarrows \begin{Bmatrix} \theta \\ \rho \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= f(\varphi, \lambda) \\ y &= g(\varphi, \lambda) \end{aligned}\right] \begin{matrix} (a, f) \\ (a, f) \end{matrix}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi(x, y) \\ \lambda &= \lambda(x, y) \end{aligned}$$

ή Απ/μοί από γεωμετρία

Οι απεικονίσεις σε διπλή ή απλή απεικόνιση

Διπλή απεικόνιση. $f_1 \rightarrow f_2 \rightarrow f_3$

κατηγορίες

επίπεδες · κυλινδρικές · κωνικές

ορθές · εγκάρσιες · πλάγιες

σύμμορφες · ισοδύναμες ·

C

ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΕΙΣ

Στοιχειώδεις

- κλίμακα $m = \frac{\Delta s}{\Delta S}_{\Delta S \to 0}$ (σημείο – διεύθυνση)
- κυρίες διευθύνσεις $\perp$
- κυρίες κλίμακες max – min m_1 m_2
- παραμόρφωση γωνίας (διευθύνσεις)
- επιφαν. κλίμακα $M = m_1 m_2$

Δείκτρια Tissot (έλλειψη)

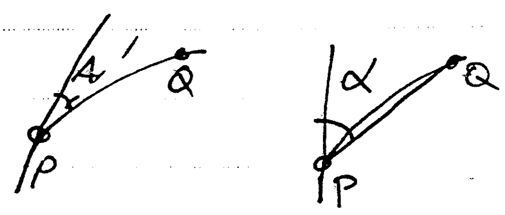
Πεπερασμένη

$$s = \int_S m\, dS = \bar{m} S$$

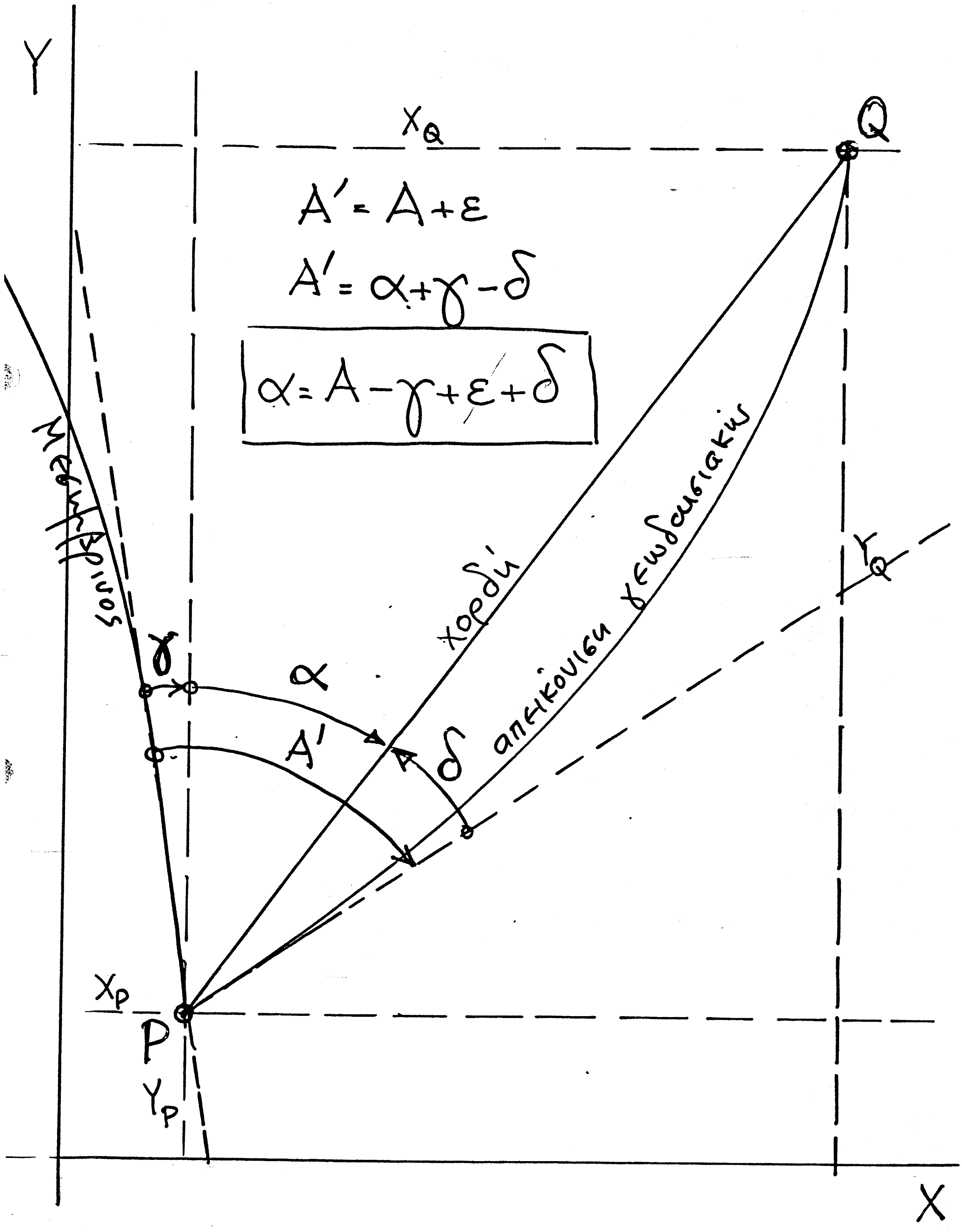
$$\varepsilon = \int_E M\, dE = \bar{M} E$$

γωνίες με εφαπτόμενη → χορδές

Προσανατολισμός



Αζιμούθιο A
γωνία διεύθυνσης α

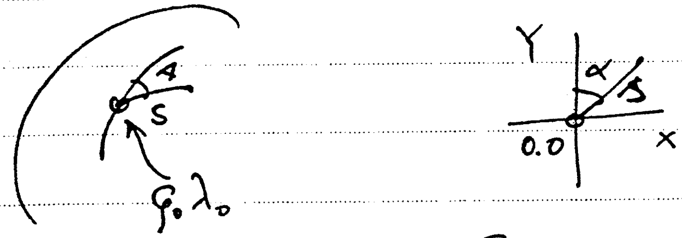

Y
X
X_Q
Q
$A' = A + \varepsilon$
$A' = \alpha + \gamma - \delta$
$\boxed{\alpha = A - \gamma + \varepsilon + \delta}$
μεσημβρινός
χορδή
απεικόνιση γεωδαισιακής
γ
α
A'
δ
X_P
P
Y_P

ΠΡΟΒΟΛΗ HATT

(πλάγια αζιμουθιακή ισαπέχουσα)

Πως προκύπτει.

πολικές ελλειψοειδούς ≡ πολικές επιπέδου



άρα

$X = s \sin\alpha = S \sin A$

$Y = s \cos\alpha = S \cos A.$

$s = S$

$\alpha = A$

Για να πάμε από $\varphi\lambda \rightarrow XY$

πρέπει να βρεθούν S και A ως προς $\varphi_0 \lambda_0$

άρα αντίστροφο γεωδαιτικό πρόβλημα

Από $XY \rightarrow \varphi\lambda$ = γεωδαιτικό πρόβλημα

Σφαίρα

$$S = R \arccos\left(\sin\varphi_0 \sin\varphi + \cos\varphi_0 \cos\varphi \cos(\lambda-\lambda_0)\right)$$

$$A = \arcsin \frac{\sin(\lambda-\lambda_0)\cos\varphi}{\sin\left(\frac{S}{R}\right)}$$

και

$$\varphi = \arcsin\left(\sin\varphi_0 \cos\frac{S}{R} + \cos\varphi_0 \sin\frac{S}{R}\cos A\right)$$

$$\lambda-\lambda_0 = \arcsin \frac{\sin A \sin\frac{S}{R}}{\cos\varphi}$$

3)

Κυριες κλιμακες

σε A $\qquad k_{min} = 1$

σε $A+90^\circ$ $\qquad \boxed{k_{max} = \dfrac{\operatorname{arc} \frac{S}{R}}{\sin \frac{S}{R}}} = 1 + \frac{1}{6}\left(\frac{S}{R}\right)^2 +$

$S = 10$ km	$k_{max} =$	0.4	ppm
20		1.6	ppm
30		3.7	
50 km		10.2	

Ελλειψοειδές

απο $\dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{\cos A}{\rho}$, $\dfrac{d\lambda}{ds} = \dfrac{\sin A}{N\cos\varphi}$

$$\Delta\varphi = \frac{d\varphi}{ds} S + \frac{1}{2!}\frac{d^2\varphi}{ds^2} S^2 + \frac{1}{3!} \cdots$$

$$\Delta\lambda = \frac{d\lambda}{ds} S + \frac{1}{2}\frac{d^2\lambda}{ds^2} S^2 + \cdots$$

όπου εμφανίζονται τα $(S\cos A)^n, (S\sin A)^n = Y^n, X^n$

Μετά δυο σειρας

ΠΡΟΒΟΛΗ HATT.

$$X = (N_0 \cos\varphi_0)\,\Delta\lambda - (\rho_0 \sin\varphi_0)\,\Delta\lambda\Delta\varphi - \left(\frac{1}{6}\rho_0 \cos\varphi_0 (2 + 9e'^2 \sin^2\varphi_0)\right) \cdot \Delta\lambda\Delta\varphi^2 - \left(\frac{1}{6} N_0 \cos\varphi_0 \sin^2\varphi_0\right)\Delta\lambda^3 + \dots$$

$$Y = (\rho_0)\,\Delta\varphi + \left(\frac{1}{2} N_0 \cos\varphi_0 \sin\varphi_0\right)\Delta\lambda^2 + \left(\frac{3}{2N_0}\rho_0^2 e'^2 \sin\varphi_0 \cos\varphi_0\right)\Delta\varphi^2 + \left(\frac{1}{6}\rho_0 (1 - 4\sin^2\varphi_0 + e'^2 \cos^4\varphi_0)\right)\Delta\varphi\,\Delta\lambda^2 + \dots$$

$$X = d_1 \Delta\lambda + d_2 \Delta\lambda\Delta\varphi + d_3 \Delta\lambda\Delta\varphi^2 + d_4 \Delta\lambda^3 + \dots$$
$$Y = c_1 \Delta\varphi + c_2 \Delta\lambda^2 + c_3 \Delta\varphi^2 + c_4 \Delta\varphi\Delta\lambda^2 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + \left(\frac{1}{\rho_0}\right) Y - \left(\frac{\tan\varphi_0}{2\rho_0 N_0}\right) X^2 - \left(\frac{3e'^2 \tan\varphi_0 \cos^2\varphi_0}{2\rho_0 N_0}\right) Y^2 - \left(\frac{1 + 3\tan^2\varphi_0 + e'^2\cos^2\varphi_0 - 9e'^2 \sin^2\varphi_0}{6\rho_0 N_0^2}\right) X^2 Y + \dots$$

$$\lambda = \lambda_0 + \left(\frac{1}{N_0 \cos\varphi_0}\right) X + \left(\frac{\tan\varphi_0}{N_0^2 \cos\varphi_0}\right) XY + \left(\frac{1 + 3\tan^2\varphi_0 + e'^2 \cos^2\varphi_0}{3N_0^2 \cos\varphi_0}\right) XY - \left(\frac{\tan^2\varphi_0}{3N_0^3 \cos\varphi_0}\right) X^3 + \dots$$

$$\varphi = \varphi_0 + a_1 Y + a_2 X^2 + a_3 Y^2 + a_4 X^2 Y + \dots$$

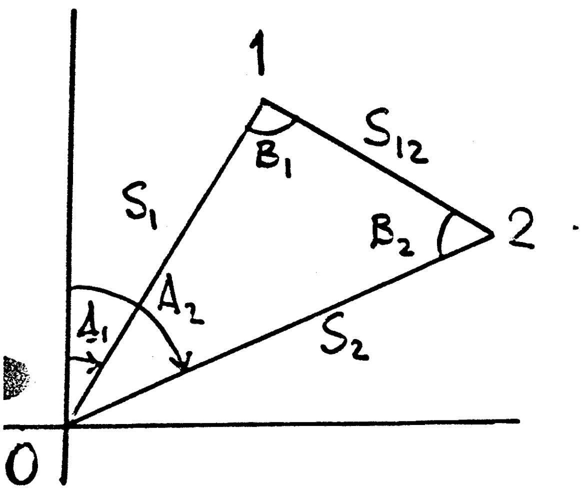
$$\lambda = \lambda_0 + b_1 X + b_2 XY + b_3 XY^2 + b_4 X^3 + \dots$$

ΠΡΟΒΟΛΗ HATT

$$\gamma = \left(\frac{\tan\varphi_0}{N_0}\right) x + \left(\frac{1+2\tan^2\varphi_0 + e'^2\cos^2\varphi_0}{2N_0^2}\right) xy + \left(\frac{\tan\varphi_0(5+6\tan^2\varphi_0+e'^2\cos^2\varphi_0)}{6N_0^3}\right) xy^2 - \left(\frac{\tan\varphi_0(1+2\tan^2\varphi_0+e'^2\cos^2\varphi_0)}{6N_0^3}\right)$$

$$\gamma = e_1 x + e_2 xy + e_3 xy^2 + e_4 x^3$$

ΑΝΑΓΩΓΕΣ



$$\delta S_{12} = \frac{S_{12}\cdot S_1^2}{6R^2}\sin^2 B_1$$

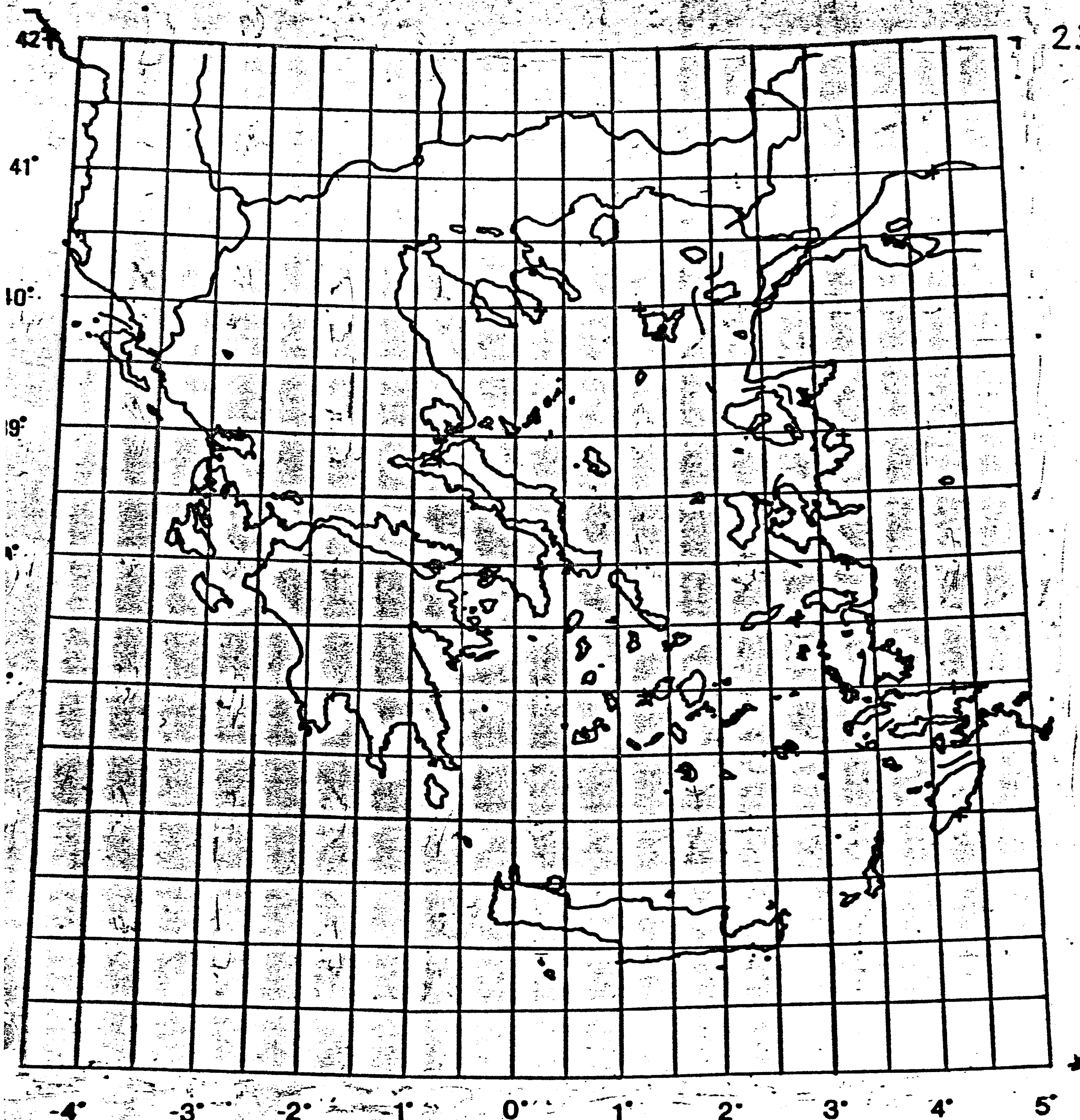
$$\varkappa_{12} = 1 + \frac{S_1^2 \sin^2 B_1}{6R^2} \quad *$$

$$\delta B_1 = \frac{S_1}{6R^2}\sin B_1 (S_1 \cos B_1 - 2S_{12})$$

$$\delta B_2 = \frac{S_2}{6R^2}\sin B_2 (S_2 \cos B_2 - 2S_{12})$$

---

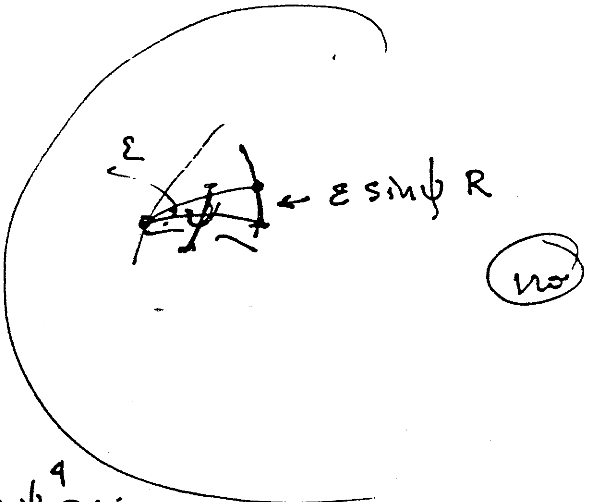
* $S_1 \sin B_1$ = αποσταση S_{12} απο O



ΔΙΑΝΟΜΗ ΚΕΝΤΡΩΝ ΚΑΙ ΦΥΛΛΩΝ ΠΡΟΒΟΛΗΣ HATT

ΣΧΕΣΗ ΜΕ ΙΣΟΔΥΝΑΜΗ + ΣΥΜΜΟΡΦΗ
(για σφαίρα)

Ισαπέχουσα (Hatt)

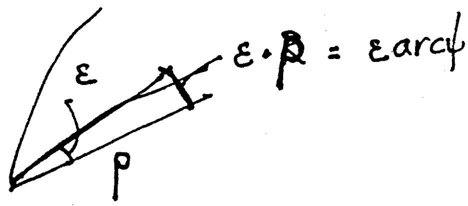


$$\rho = R\,\mathrm{arc}\,\psi$$

κλίμακα | ακτ. 1
εφαπτ. $\frac{\mathrm{arc}}{\sin} = 1/\left(1-\frac{1}{6}\psi^2+\frac{1}{24}\psi^4-\dots\right)$

$$\simeq 1+\frac{1}{6}\psi^2-\dots$$

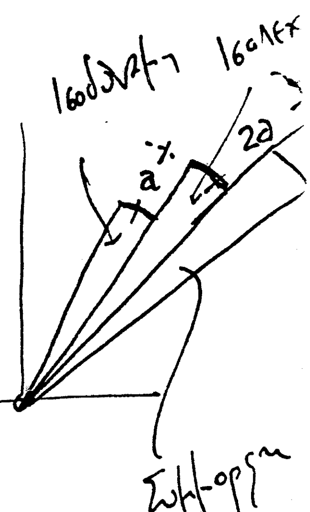
$$\boxed{\rho = 2R\,\mathrm{arc}\,\frac{\psi}{2}}\,, \quad \boxed{\rho = R\,(\psi + 0)}$$



Ισοδύναμη

αποκλίσεις μικρότερες ώστε $x_{\text{ακτ.}}\ \frac{\sin}{\mathrm{arc}}$.

$$\boxed{\rho = 2R\sin\frac{\psi}{2}}\,, \quad \boxed{\rho = R\left(\psi - \frac{1}{24}\psi^3 + \dots\right)}$$



Σύμμορφη

απόκλιση μεγαλύτερη ώστε $x\ \frac{\mathrm{arc}}{\sin}$ . . .

$$\boxed{\rho = 2R\tan\frac{\psi}{2}}\,, \quad \boxed{\rho = R\left(\psi + \frac{1}{12}\psi^2 + \dots\right)}$$

$\rho_{max} = 2R$ (ι

$\rho_{max} = \infty$ (α

$\rho_{max} = \pi R$ (ι

ΟΡΘΗ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗ

(σε σφαίρα)

Αρχή $x = R\lambda$

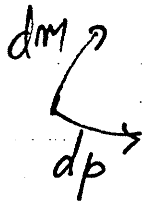
$y =$ έτσι για σύμμορφη

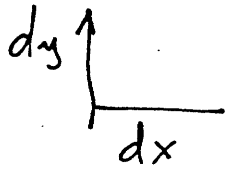
(αν $y = R\varphi$?)

$\downarrow$

$\varkappa_m = 1$

$\varkappa_p = \frac{1}{\cos\varphi}$





$dm = R\,d\varphi$

$dp = R\cos\varphi\,d\lambda$

$dx = R\,d\lambda$

$dy = ?$

Πρέπει

$\varkappa_m = \varkappa_p$ ή $\frac{dy}{dm} = \frac{dx}{dp}$

$$dy = \frac{R\,d\varphi}{\cos\varphi}$$

$$y = R\int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos\varphi}\,d\varphi$$

$$y = R\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$$

άρα

$$\varkappa_m = \varkappa_p = \frac{1}{\cos\varphi}$$

επειδή $\frac{1}{\cos\varphi} = 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{5}{24}\varphi^4 + \ldots \therefore y = R\int 1 + \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{5}{24}\varphi^4 + \ldots$

$$y = R\left(\varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 + \frac{1}{24}\varphi^5 + \ldots\right)$$

$$= M + \frac{M^3}{6R^2} + \frac{M^5}{24R^4} + \ldots$$

Σε ελλειψοειδή

. . . . . .

$$x = a\lambda$$

$$y = a \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)\left(\frac{1 - e\sin\varphi}{1 + e\sin\varphi}\right)^{\frac{e}{2}}\right]$$

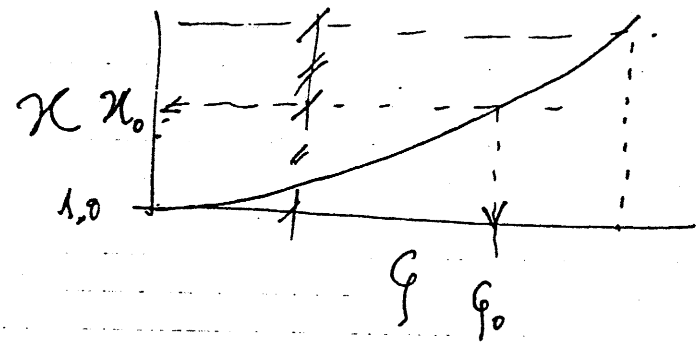
$$\left\{\begin{array}{l} dm = \rho\, d\varphi \\ dp = N\cos\varphi\, d\lambda \\ \quad\quad \downarrow \\ dm = \dfrac{a(1-e^2)\, d\varphi}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \\ dp = \dfrac{a\cos\varphi\, d\lambda}{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2}} \end{array}\right.$$

$$\boxed{x_m = x_p \cdot \frac{(1 - e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}{\cos\varphi}}$$

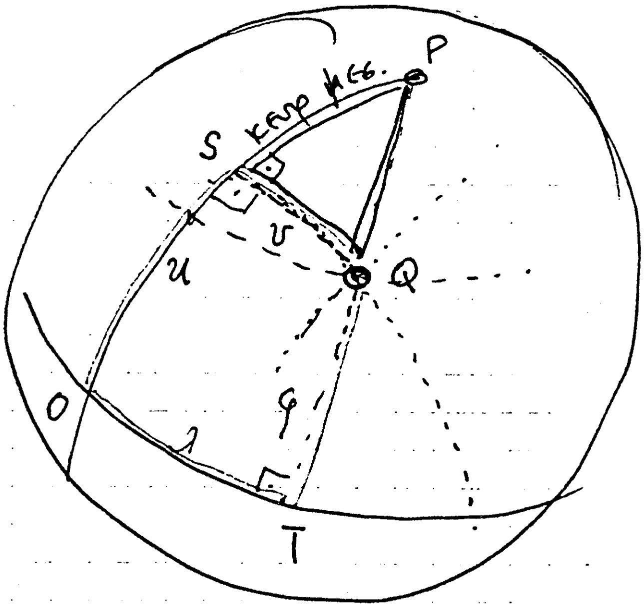
ΠΡΟΒΟΛΗ ΚΑΛΗ ΓΙΑ ΙΣΗΜΕΡΙΝΟ

$1^\circ \approx 150$ ppm $\quad 2^\circ \sim 600$ ppm $\quad 3^\circ \sim 1400$ ($60^\circ \times 2$!)

ΑΝΑΓΩΓΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ



Εγκάρσια Μερκατορική



Σφαίρα (Δ PQS)

$\cot u = \cot\varphi \cos\lambda$

$\sin v = \cos\varphi \sin\lambda$

$\sin\varphi = \cos v \sin u$

$\cot\lambda = \cot v \cos u$

Αν $\left.\begin{aligned} x &= Rv \\ y &= Ru \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{aligned} x &= R(\lambda\cos\varphi) - \frac{1}{6}R(\lambda\cos\varphi)^3\tan^2\varphi \\ y &= R\varphi + \frac{R}{2}(\lambda\cos\varphi)^2\tan\varphi + \dots \end{aligned}$

έχουμε μια τετραγωνική προβολή

Cassini ή Soldner

Αν το x $(= Rv)$ μεγαλώσει ώστε αφορά τα

$$X = R\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) = R\left(v + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{24}v^5 + \dots\right.$$

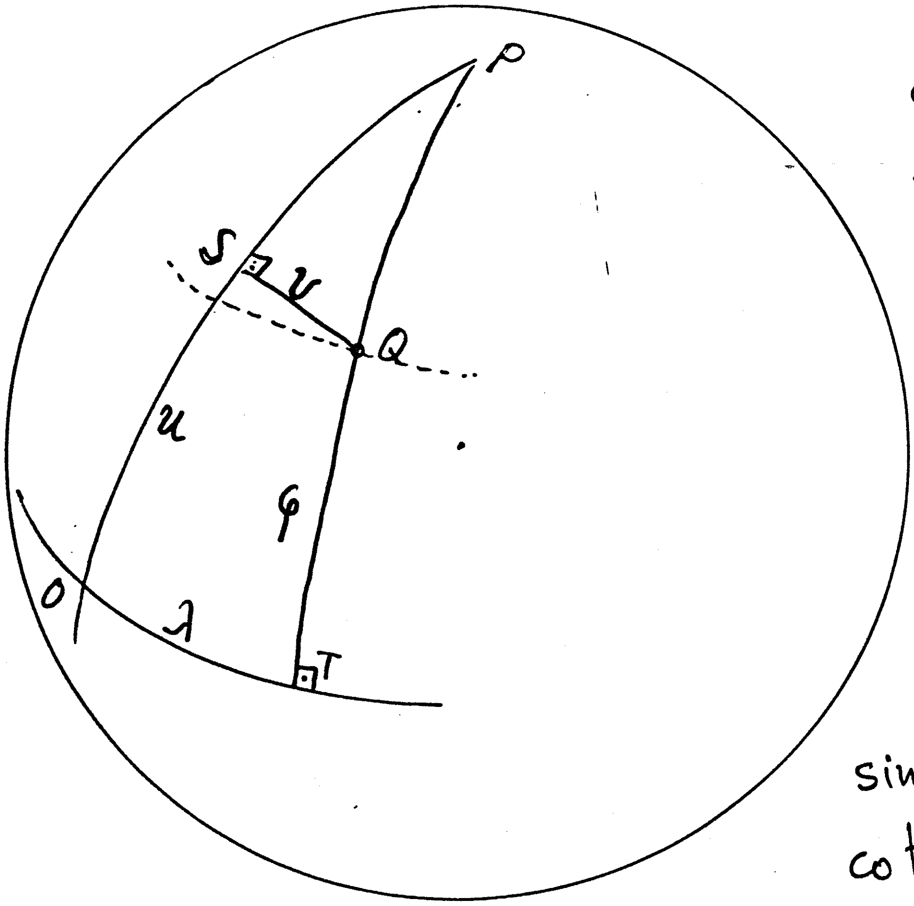
$$y = Ru$$

Και αν σε σφαίρα

$$x = R(\lambda\cos\varphi) + \frac{R}{6}(\lambda\cos\varphi)^3(1 - \tan^2\varphi) + \dots$$

$$y = R\varphi + \frac{R}{2}(\lambda\cos\varphi)^2\tan\varphi$$

ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗ



$\cot u = \cot\varphi \cos$

$\sin v = \cos\varphi \sin$

$\sin\varphi = \cos v \sin u$

$\cot\lambda = \cot v \cos u$

ASSINI

$$\boxed{\begin{array}{lll} x = Rv & \text{ή} & x = R(\lambda\cos\varphi) - \frac{1}{6}R(\lambda\cos\varphi)^3\tan^2\varphi + \cdots \\ y = Ru & \text{ή} & y = R\varphi + \frac{1}{2}R(\lambda\cos\varphi)^2\tan\varphi + \cdots \end{array}}$$

$$x = R\ln\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{v}{2}\right) = R\left(v + \frac{1}{6}v^3 + \frac{1}{24}v^5 + \cdots\right)$$

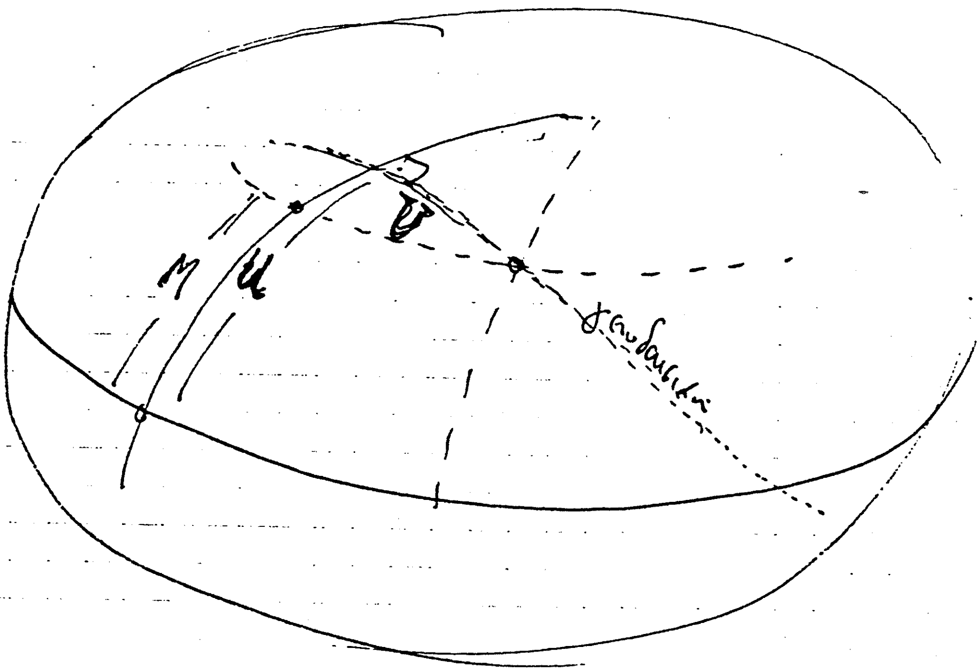
$$y = Ru$$

ή

$$x = R(\lambda\cos\varphi) + \frac{1}{6}R(\lambda\cos\varphi)^3(1 - \tan\varphi) + \cdots$$

$$y = R\varphi + \frac{1}{2}R(\lambda\cos\varphi)^2\tan\varphi + \cdots$$

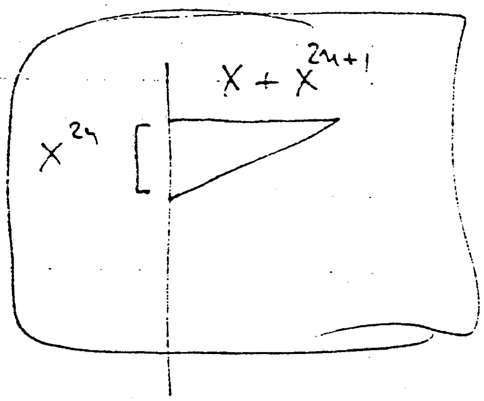
Εγκάρσια Μερκατορική Ελλειψοειδή



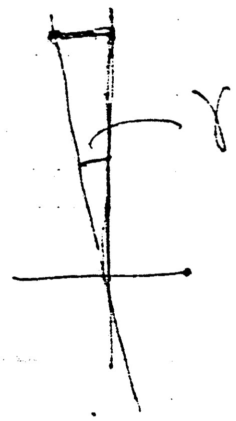
Αρχή

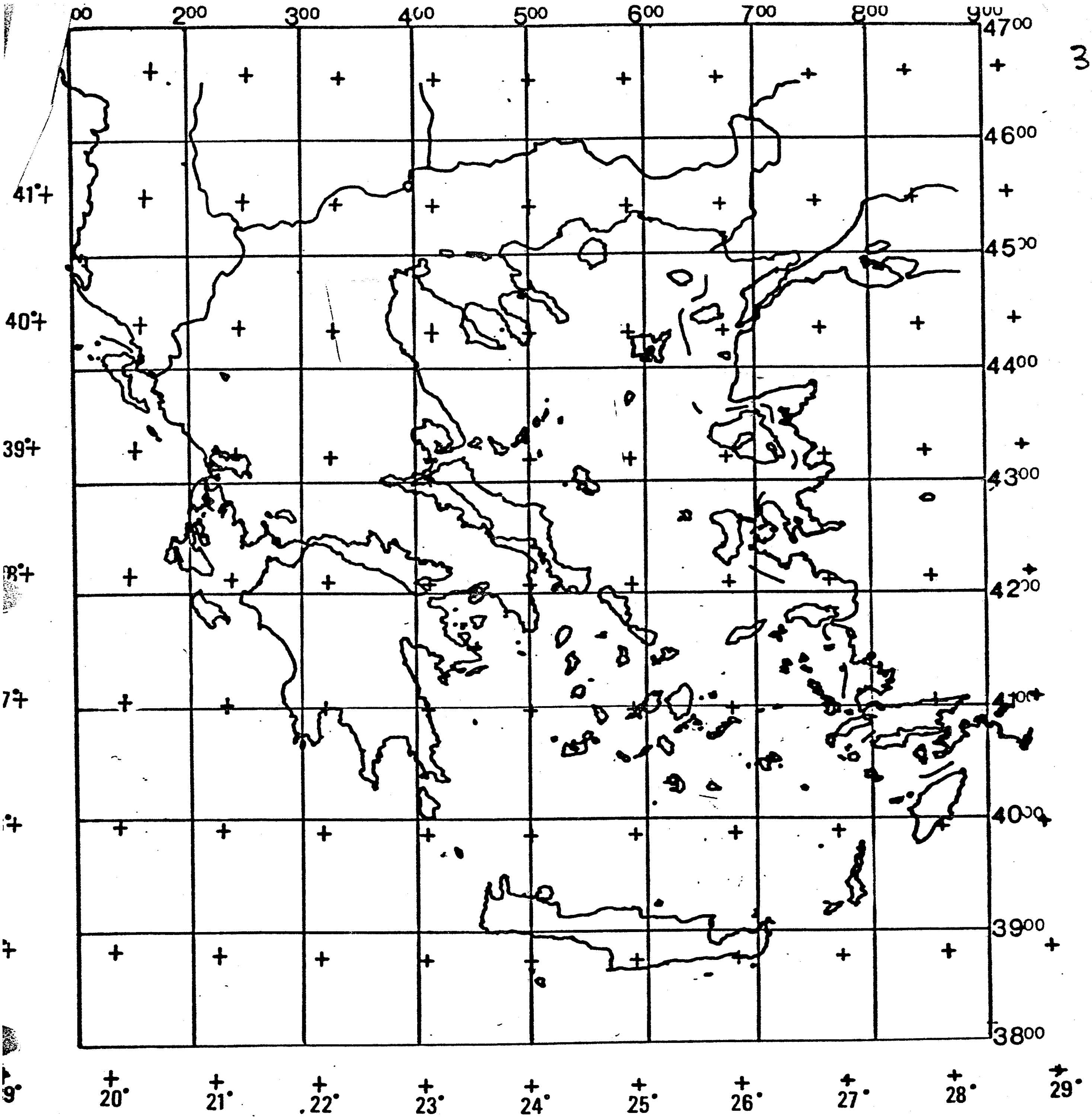
$$Y = u$$

$$X = v + \dots$$



$$\gamma = -\frac{\dfrac{\partial x}{\partial q}}{\dfrac{\partial y}{\partial q}}$$





ΔΙΚΤΥΟ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΚΑΝΑΒΟΥ
ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ
$\lambda_o=24$ $K_o=0.999600$
ΚΛΙΜΑΚΑ 1:5M

ΣΧ.8

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

$$Y=Y_\circ+A_2\Delta\lambda^2+A_4\Delta\lambda^4+A_6\Delta\lambda^6 \qquad (Y_\circ=K_\circ M)$$

$$X=X_\circ+B_1\Delta\lambda+B_3\Delta\lambda^3+B_5\Delta\lambda^5 \quad * \quad \boxed{(X_\circ=0.5Mm)}$$

$$\varphi=\varphi_\circ+D_2\Delta X^2+D_4\Delta X^4+D_6\Delta X^6$$

$$\lambda=\lambda_\circ+E_1\Delta X+E_3\Delta X^3+E_5\Delta X^5 \qquad \boxed{(\lambda_\circ=24^\circ)}$$

$$\gamma=C_1\Delta\lambda+C_3\Delta\lambda^3+C_5\Delta\lambda^5$$

$$=F_1\Delta X+F_3\Delta X^3+F_5\Delta\lambda^5$$

$$\delta_{12}=G_1(Y_2-Y_1)\Delta X_{\frac{1}{3}}+G_3(Y_2-Y_1)\Delta X^3_{\frac{1}{3}}$$

$$K=K_\circ+K_2\Delta X^2+K_4\Delta X^4 \quad * \quad \boxed{(K_\circ=0.99960}$$

$$=K_\circ+L_2\Delta\lambda^2+L_4\Delta\lambda^4$$

Οι συντελεστές A,B,C,D,E,F,G,K,L είναι συναρτήσεις του πλάτους και των παραμέτρων του ελλειψοειδούς αναφοράς.

M είναι το μήκος του μεσημβρινού από τον Ισημερινό μέχρι το πλάτος φ

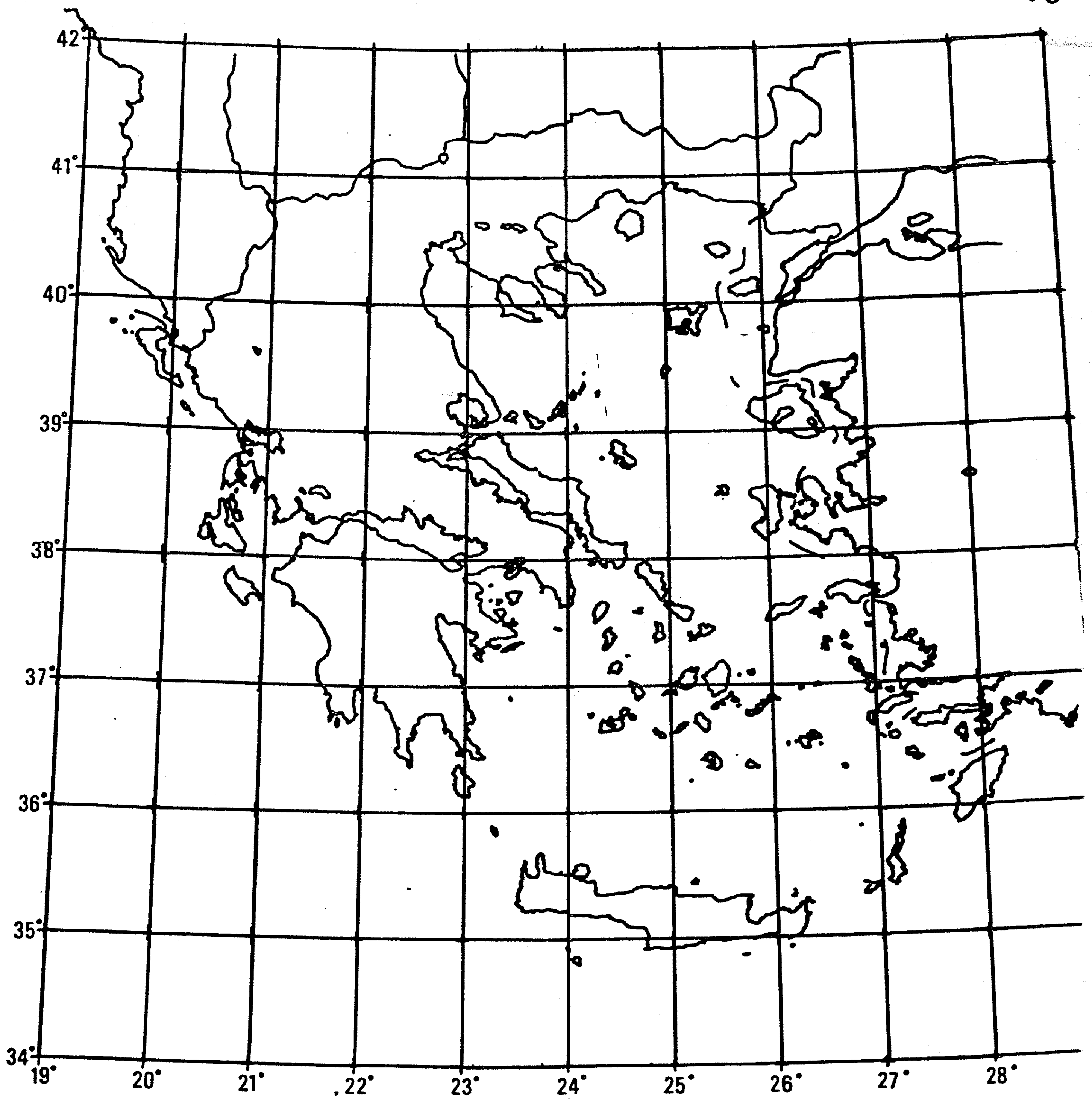
$\Delta\lambda=\lambda-\lambda_\circ$, $\Delta X=X-X_\circ$

$\varphi_\circ$ είναι το πλάτος που αντιστοιχεί σε τόξο μεσημβρινού Y ανηγμένο στην κλίμακα $K_\circ$

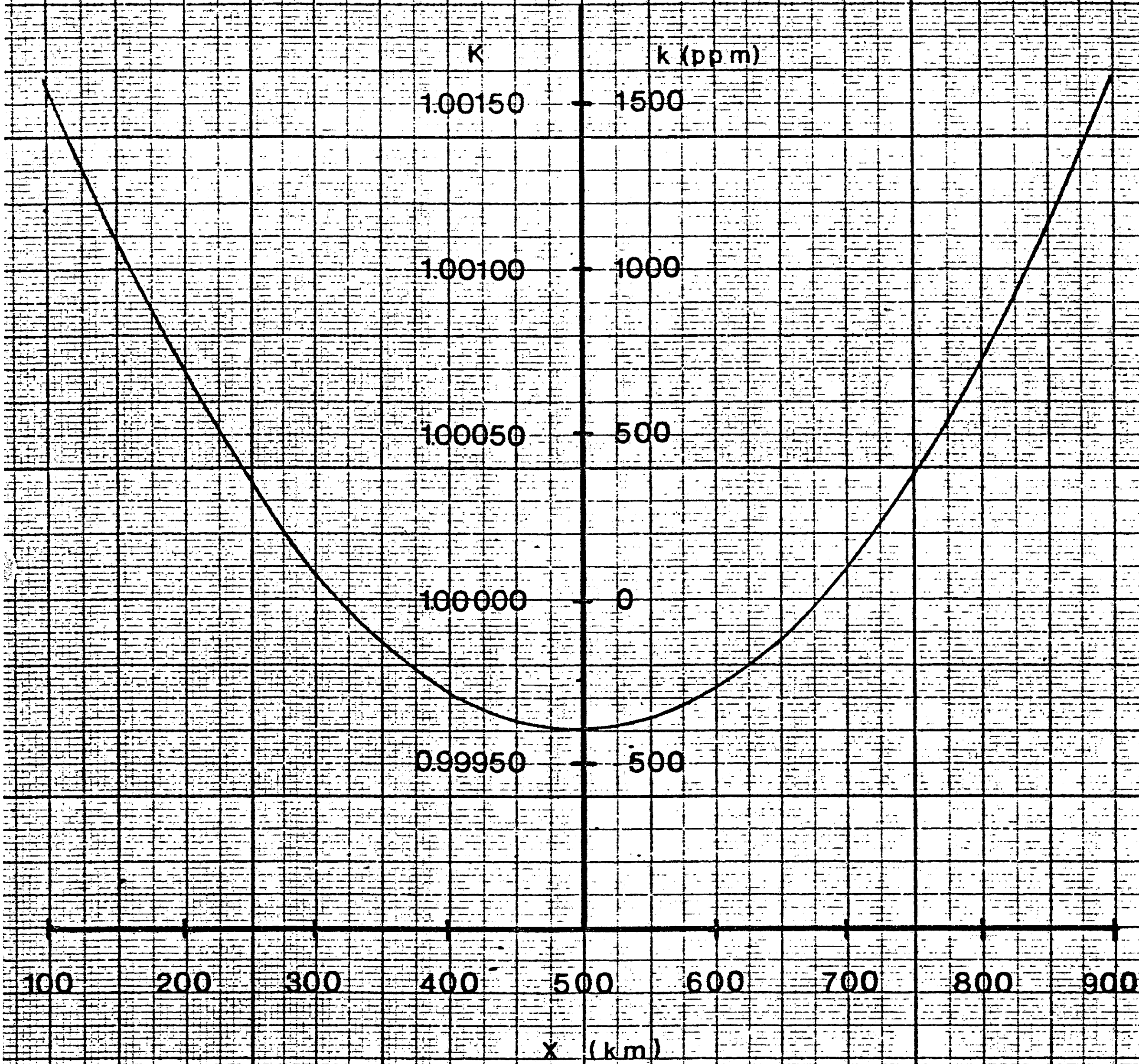
ΕΓΣΑ'87

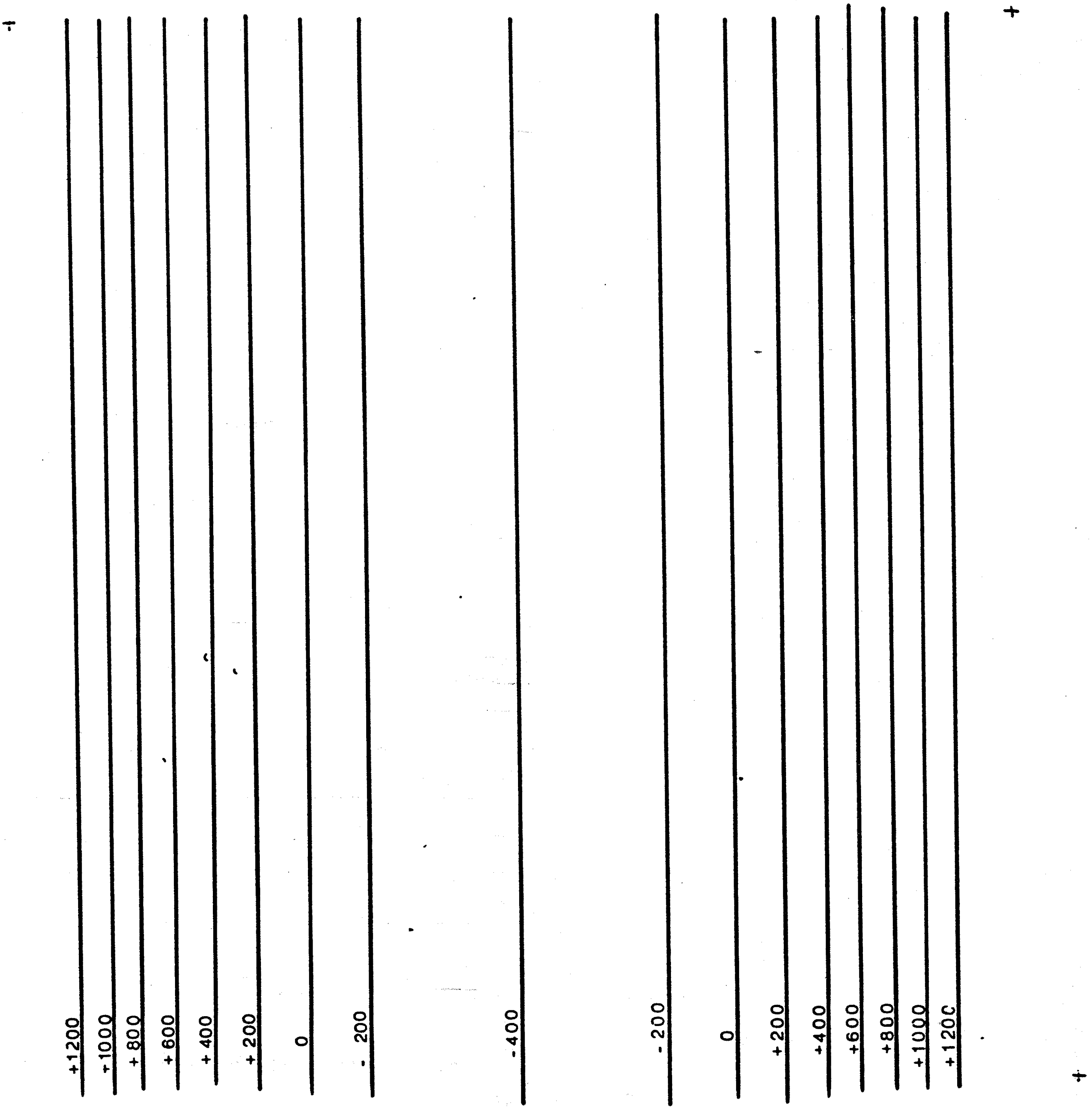
* ΤΜ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΙΙ



ΧΑΡΤΗΣ ΤΗΣ ΕΛΛΑΔΑΣ
ΣΕ ΕΓΚΑΡΣΙΑ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗ ΠΡΟΒΟΛΗ
(λ_o=24°, K_o=0.999600)
ΚΛΙΜΑΚΑ 1:5M


K
k (ppm)
1.00150
1500
1.00100
1000
1.00050
500
1.00000
0
0.99950
500
100
200
300
400
500
600
700
800
900
X (km)



ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗ ΚΛΙΜΑΚΑΣ (ΣΕ ppm)

ΤΗΣ ΕΓΚΑΡΣΙΑΣ ΜΕΡΚΑΤΟΡΙΚΗΣ ΠΡΟΒΟΛΗΣ

$\lambda_o = 24^\circ$ $K_o = 0.999600$

ΣΧ. 9

$$X = X_0 + \left[N \cos\varphi\right] \Delta\lambda + \left[\frac{N \cos^3\varphi}{6} \left(1 - t^2 + n^2\right)\right] \Delta\lambda^3 + \left[\frac{N \cos^5\varphi}{120} \left(5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - 58t^2n^2\right)\right] \Delta\lambda^5$$

$$Y = Y_0 + \left[\frac{N \tan\varphi \cos^2\varphi}{2}\right] \Delta\lambda^2 + \left[\frac{N \tan\varphi \cos^4\varphi}{24} \left(5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4\right)\right] \Delta\lambda^4 + \left[\frac{N \tan\varphi \cos^6\varphi}{720} \left(61 - 58t^2\right)\right] \Delta\lambda^6$$

$$t = \tan\varphi \qquad n = e'^2 \cos^2\varphi$$

$$X = X_0 + \left[K_0 N\right] L + \left[K_0 \frac{N}{6} \left(1 - t^2 + n^2\right)\right] L^3 + \left[K_0 \frac{N}{120} \left(5 - 18t^2 + t^4 + 14n^2 - 58t^2n^2\right)\right] L^5$$

$$Y = K_0 M + \left[K_0 \frac{N \tan\varphi}{2}\right] L^2 + \left[K_0 \frac{N \tan\varphi}{24} \left(5 - t^2 + 9n^2 + 4n^4\right)\right] L^4 + \left[K_0 \frac{N \tan\varphi}{720} \left(61 - 58t^2\right)\right] L^6$$

$$L = \Delta\lambda \cos\varphi$$

$$= \lambda_0 + \left[\frac{1}{N_0 \cos\varphi_0 K_0}\right]\Delta X - \left[\frac{1}{6K_0^3 N_0^3 \cos\varphi_0}(1+2t_0^2+\eta_0^2)\right]\Delta X^3$$

$$+ \left[\frac{1}{120 K_0^5 N_0^5 \cos\varphi_0}(5+6\eta^2-28t^2-8t^2\eta^2+24t^4)\right]\Delta X^5$$

$$= \varphi_0 - \left[\frac{\tan\varphi_0}{2K_0^2N_0^2}(1+\eta_0^2)\right]\Delta X^2 + \left[\frac{\tan\varphi_0}{24K_0^4N_0^4}(5+3t_0^2+6\eta_0^2-3\eta_0^4-6t_0^2\eta_0^2-9t_0^2\eta_0^4)\right]\Delta X^4$$

$$- \left[\frac{\tan\varphi_0}{720K_0^6N_0^6}(61+90t_0^2+45t_0^4)\right]\Delta X^6$$

$$= \left\{\left[\left(\frac{5-18t^2+t^4+14\eta^2-58t^2\eta^2}{120}\right)L^2 + \left(\frac{1-t^2+\eta^2}{6}\right)\right]L^2+1\right\} L N K_0 + X_0$$

$$= \left\{\left\{\left[\left(\frac{61-58t^2}{720}\right)L^2 + \left(\frac{5-t^2+9\eta^2+4\eta^4}{24}\right)\right]L^2 + \frac{1}{2}\right\} L^2 N \tan\varphi_0 + M\right\} K_0$$

$$= \left[\left\{\left[-\left(\frac{61+90t_0^2+45t_0^4}{720}\right)P^2 + \left(\frac{5+3t_0^2+6\eta_0^2-3\eta_0^4-6t_0^2\eta_0^2-9t_0\eta_0^4}{24}\right)\right]P^2 - \left(\frac{1+\eta_0^2}{2}\right)\right\}P^2\right]\tan\varphi_0 + \varphi_0$$

$$= \left[\left\{\left[\left(\frac{5+6\eta_0^2-28t_0^2-8t_0^2\eta_0^2+24t_0^4}{120}\right)P^2 - \left(\frac{1+2t_0^2+\eta_0^2}{6}\right)\right]P^2+1\right\}P\right]\frac{1}{\cos\varphi_0} + \lambda_0$$

$$P = \frac{X - X_0}{K_0 N_0} \qquad L = \Delta\lambda \cos\varphi$$

$$\gamma = \left[\frac{\tan\varphi_0}{K_0 N_0}\right]\Delta X - \left[\frac{\tan\varphi_0}{3K_0^3 N_0^3}(1+t_0^2-\eta_0^2-2\eta_0^4)\right]\Delta X^3 + \left[\frac{\tan\varphi_0}{15K_0^5N_0^5}(2+5t_0^2-3t_0^4)\right]\Delta X^5$$

$$K = K_0 + \left[\frac{1}{2K_0N_0^2}(1+\eta_0^2)\right]\Delta X^2 + \left[\frac{1}{24K_0^3N_0^4}(1+6\eta_0^2)\right]\Delta X^4$$

$$\delta_{12} = -\frac{1}{6R^2}(Y_2-Y_1)(2\Delta X_1+\Delta X_2)\left[1-\frac{(2\Delta X_1+\Delta X_2)^2}{27R^2}\right]$$

$$K_{12} = K_0\left[1+\left(\frac{\Delta X_1^2+\Delta X_1\Delta X_2+\Delta X_2^2}{6K_0^2R^2}\right)\left(1+\frac{\Delta X_1^2+\Delta X_1\Delta X_2+\Delta X_2^2}{36K_0^2R^2}\right)\right]$$

$$\delta_{12} = -2''.539\,(Y_2-Y_1)(X_{1/3}-0.5)$$

$$\varkappa = 12311(X_{1/2}-0.5)^2 - 400 \quad \text{ppm}$$

(X σε ~~Mm~~ Mm. Y σε Km.)

1. ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

2. ΤΙ ΓΙΝΕΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

3. ΠΩΣ ΕΠΙΛΕΓΕΤΑΙ ΕΝΑ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

4. ΠΩΣ ΕΓΙΝΕ Η ΕΠΙΛΟΓΗ

5. ΠΟΙΟ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ '87

6. ΠΩΣ ΥΛΟΠΟΙΕΙΤΑΙ ΤΟ ΕΓΣΑ '87

7. ΤΙ ΣΗΜΑΙΝΕΙ ΣΤΗ ΠΡΑΞΗ ΤΟ ΕΓΣΑ '87

8. ΠΩΣ ΣΥΝΔΕΕΤΑΙ ΜΕ ΤΑ ΥΠΑΡΧΟΝΤΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΤΟ ΕΓΣ

ΟΙ ΘΕΣΕΙΣ ΣΗΜΕΙΩΝ ΣΤΟ ΧΩΡΟ =

= ΕΝΤΟΠΙΣΜΟΣ

ΣΧΕΤΙΚΟΣ! (ως προς....)

<u>ΕΚΦΡΑΣΗ</u> της θεσης ενος σημειου

με συντεταγμενες σε συστημα συντεταγμενων

<u>ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ</u> για την ευρεση της θεσης σημειου

με μετρησεις στο συστημα συντεταγμενων

με μεθοδους επιγειας γεωδαισιας, φωτογραμμετρια, δορυφορικες, κλπ.

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

ορισμός	με Datum
υλοποίηση	με Γεωδαιτικο δικτυο
εφαρμογή	με επιπεδες (συνήθως) συντεταγμενες

(Συνήθως)

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ

- οριζεται με το Datum
- υλοποιηται με γεωδαιτικά δίκτυα
- εφαρμοζεται με επίπεδες συντεταγμένες

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΠΟΥ ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΝΤΑΙ ΣΤΗΝ ΕΛΛΑΔΑ

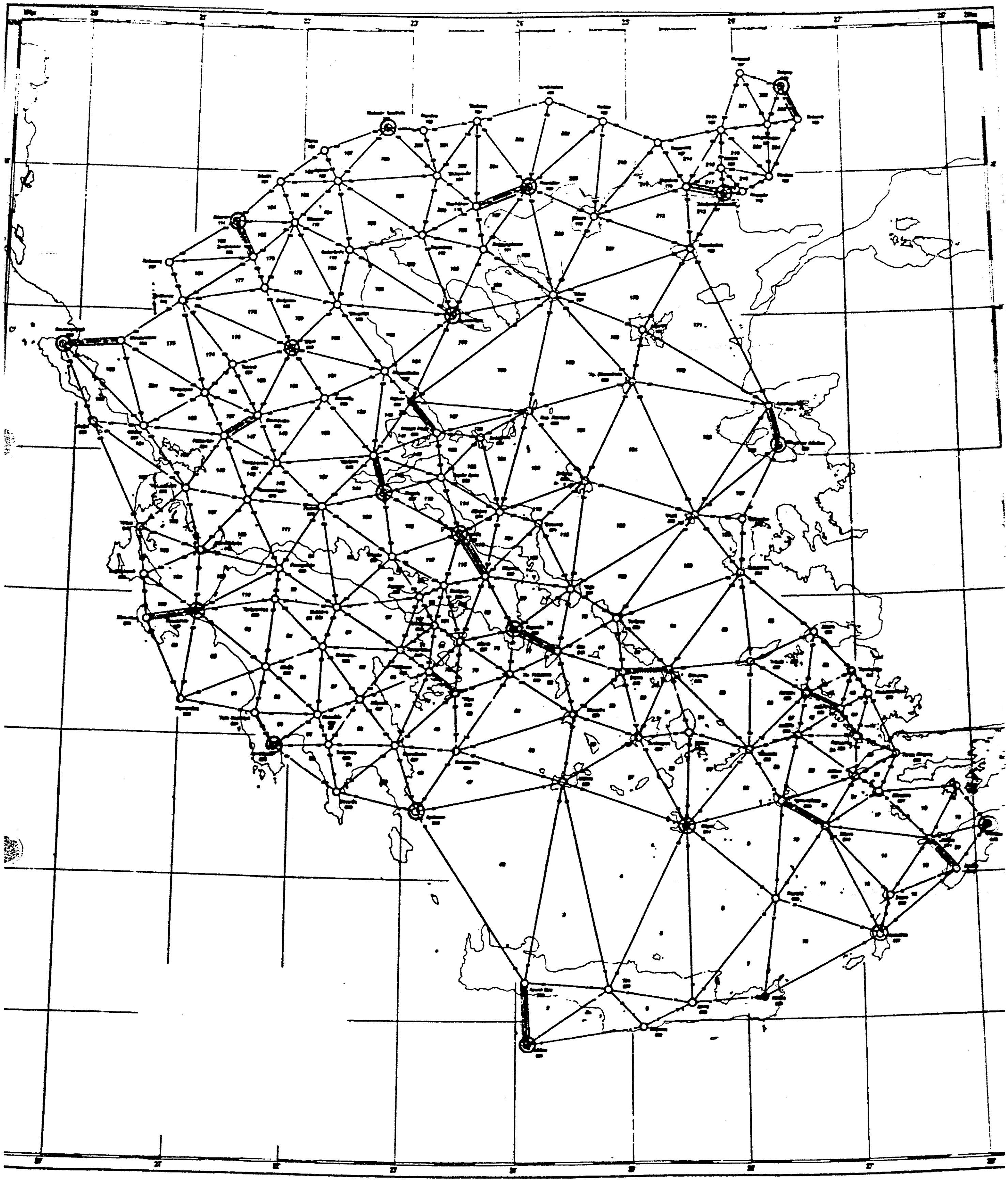
	DATUM	ΑΦΕΤΗΡΙΑ	ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ	ΔΙΚΤΥΟ	ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ	ΠΡΟΒΟΛΗ	ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ
ΕΠΙΓΕΙΑ	ΕΛΛΗΝΙΚΟ (ΠΑΛΑΙΟ BESSEL)	ΑΣΤΕΡΟΣΚΟΠΕΙΟ	BESSEL	ΠΑΛΑΙΟ (ΠΡΟ 1940) ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	ΠΡΟ ΤΟΥ 1940 ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	HATT	ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΠΙΟ ΔΙΑΔΕΔΟΜΕΝΟ
	"	"	"	"	"	ΕΜΠ 3°	ΥΠ.ΠΕ.ΧΩ.-Δ.Ε. Γ.Υ.Σ.
	ΕΛΛΗΝΙΚΟ (ΝΕΟ BESSEL)	ΚΤΥΠΑΣ	"	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑ ΤΟ 1975	1982	HATT	ΔΕΝ ΕΧΕΙ ΑΚΟΜΑ ΕΦΑΡΜΟΣΤΕΙ
	ED 50	POTSDAM	MAYFORD	ΠΑΛΑΙΟ (ΠΡΟ 1940) ΜΕ ΣΥΜΠΛΗΡΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ.	1950 ΜΕ ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΑΝΑΘΕΩΡΗΣΕΙΣ	UTM	ΕΥΡΩΠΑΙΚΟ
ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΑ	WGS 72	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ	WGS 72	ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ (DOPPLER)	1972	———	ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ
	WGS 84	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ	GRS 80	ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ (DOPPLER + GPS)	1984	———	ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ
	BTS	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ	GRS 80	ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ	ΝΕΑ ΣΥΝΟΡΘΩΣΗ ΚΑΘΕ ΧΡΟΝΟ	———	ΠΑΓΚΟΣΜΙΟ
	ΕΓΣΑ 87	ΓΕΩΚΕΝΤΡΟ ΜΕΤΑΤΕΘΗΜΕΝΟ	GRS 80	ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΜΕΤΑ 75 ΜΑΖΙ ΜΕ ΔΟΡΥΦΟΡΙ- ΚΕΣ	1987	ΕΜΠ (UTM με $\lambda_o=24°$)	ΕΛΛΗΝΙΚΟ + ΔΟΡΥΦΟΡΙΚΟ

*	BESSEL	a=6 377 397.155	f=1/299.1528128
	HAYFORD	a=6 378 388	f=1/297
	WGS 72	a=6 378 135	f=1/298.26
	GRS 80	a=6 378 137	f=1/298.2572236

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

ΓΕΩΓΡ. ΥΠΗΡ. ΣΤΡΑΤΟΥ

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ
ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ 1ης ΤΑΞΕΩΣ



- o ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΟ (137)
- ◎ ΣΗΜΕΙΟ LAPLACE (20)
- ── ΜΕΤΡΗΜΕΝΗ ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ (720)
- ══ ΜΕΤΡΗΜΕΝΗ ΑΠΟΣΤΑΣΗ (17)

ΤΟ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟ ΔΙΚΤΥΟ Ιης ΣΧ.1

ΠΩΣ ΕΠΙΛΕΓΕΤΑΙ ΕΝΑ ΓΣΑ

ΤΟ DATUM

καλυτερη προσαρμογη του ελλειψοειδούς στο γεωειδες της περιοχης. *

Συνήθως χρησιμοποιειται το GRS 80

ΤΟ ΔΙΚΤΥΟ

το δυνατοτερο σχημα με τις καλυτερες μετρήσεις και σωστη συνορθωση

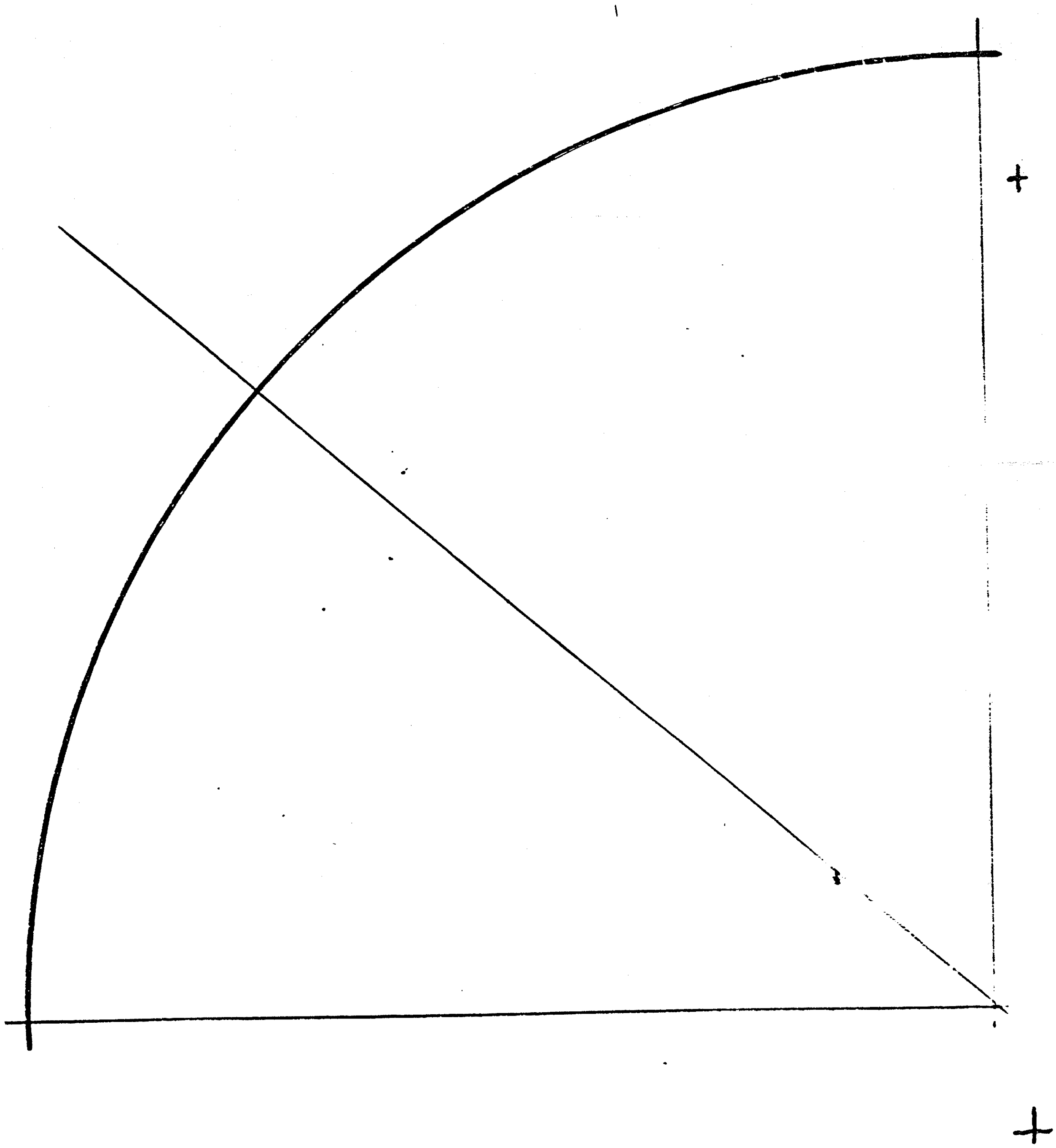
Συνηθως χρησιμοποιειται δικτυο 0^ης ταξεως με δορυφόρους

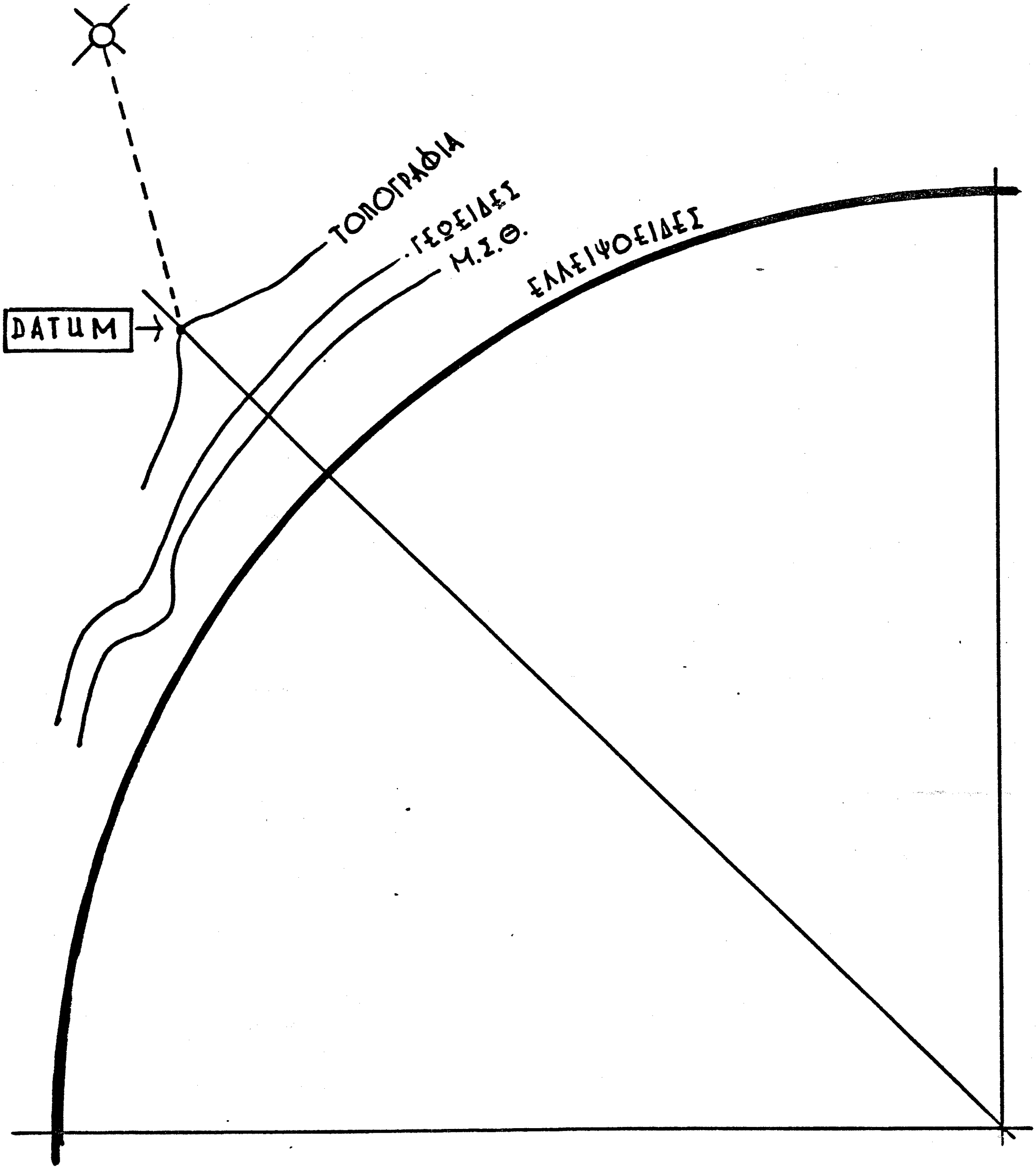
ΤΟ ΠΡΟΒΟΛΙΚΟ

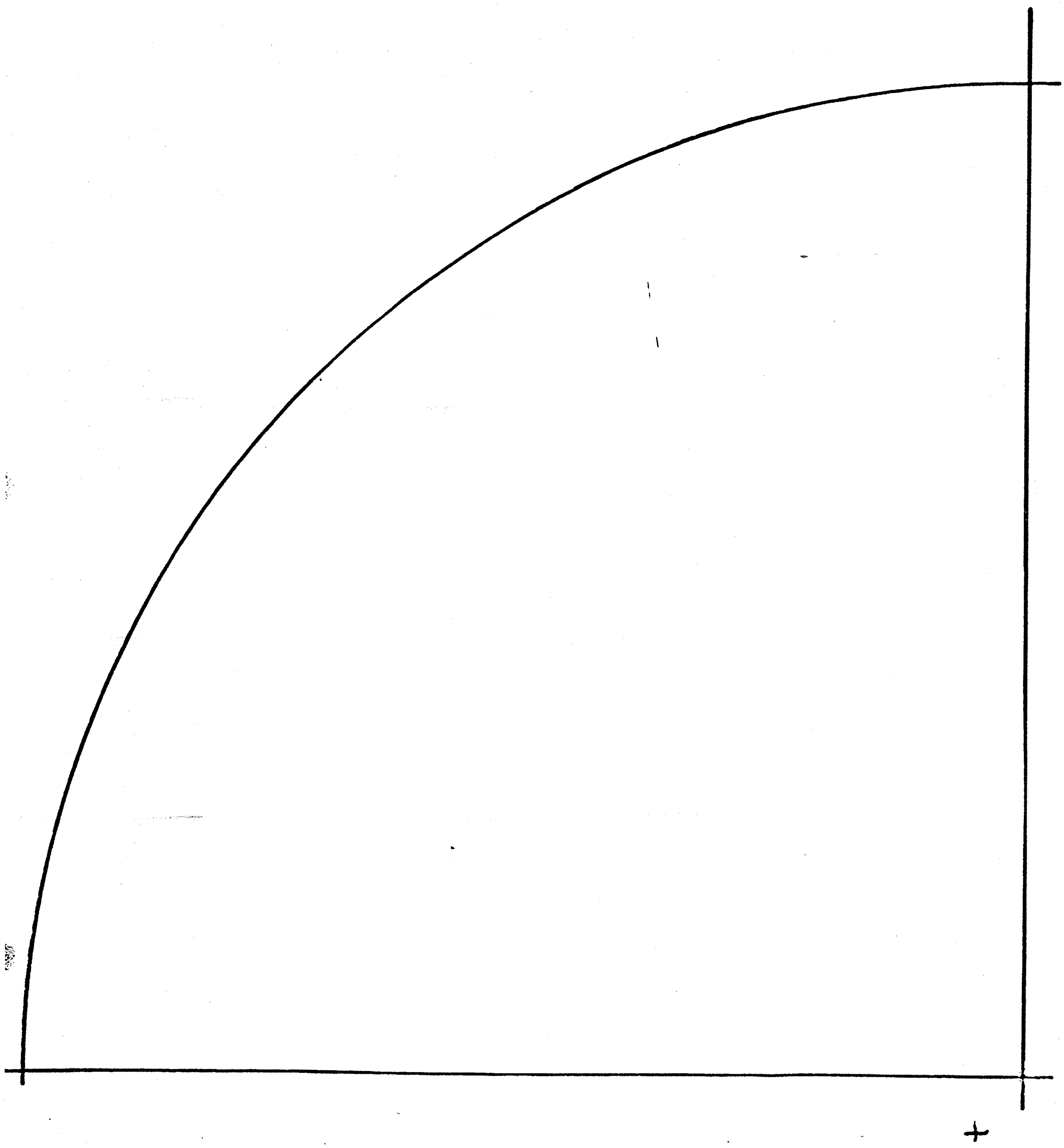
ελαχιστοποίηση των παραμορφώσεων στη περιο

Συνήθως χρησιμοποιειται Εγκαρσια Μερκατορική (με παραλλαγές!)

* Αν πρόκειται να χρησιμοποιηθεί μόνο δορυφορικος (ή άλλος 3-D) εντοπισμος τοτε δεν είναι ανάγκη




ΤΟΠΟΓΡΑΦΙΑ
ΓΕΩΕΙΔΕΣ
Μ.Σ.Θ.
ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ
DATUM



ΕΓΣΑ '87 *

DATUM

- Ελλειψοειδές GRS 80

  $a = 6\,378\,137$ (m)

  $f = 1/298.2572236$

- Συμβατική αφετηρία Διόνυσος

  $\varphi = 38^\circ 04' 33''.8000$

  $\lambda = 23^\circ 55' 51''.0000$

ΔΙΚΤΥΟ

- Το Δίκτυο Iης (και IIας, IIIης...) της ΓΥΣ ενισχυμένο με (30) δορυφορικά σημεία
- Κλίμακα και προσανατολισμός του ETRS 89 μέσω δορυφόρων

ΠΡΟΒΟΛΗ

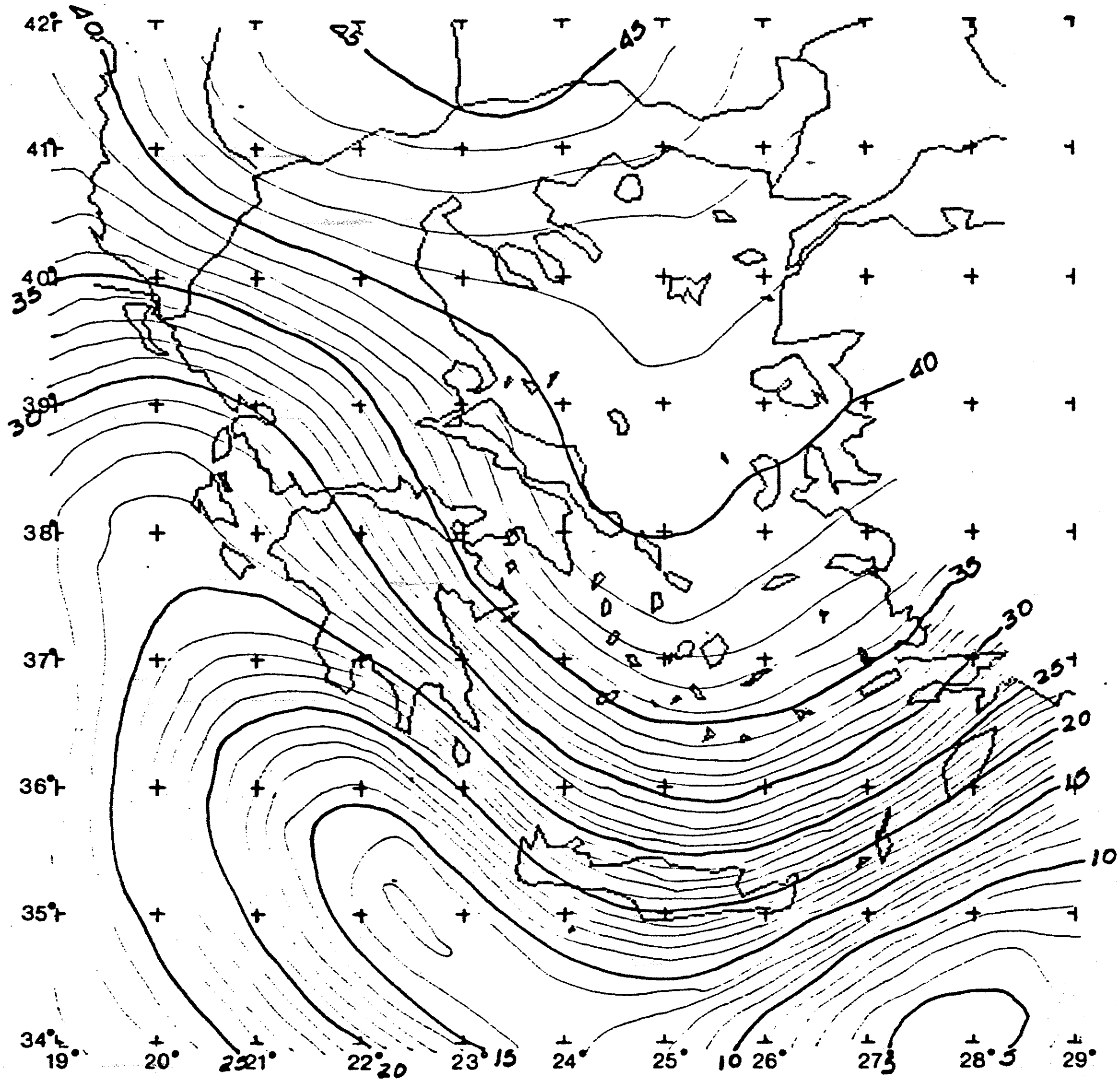
- Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή

  $\lambda_0 = 24^\circ$

  $K = 0.999600$

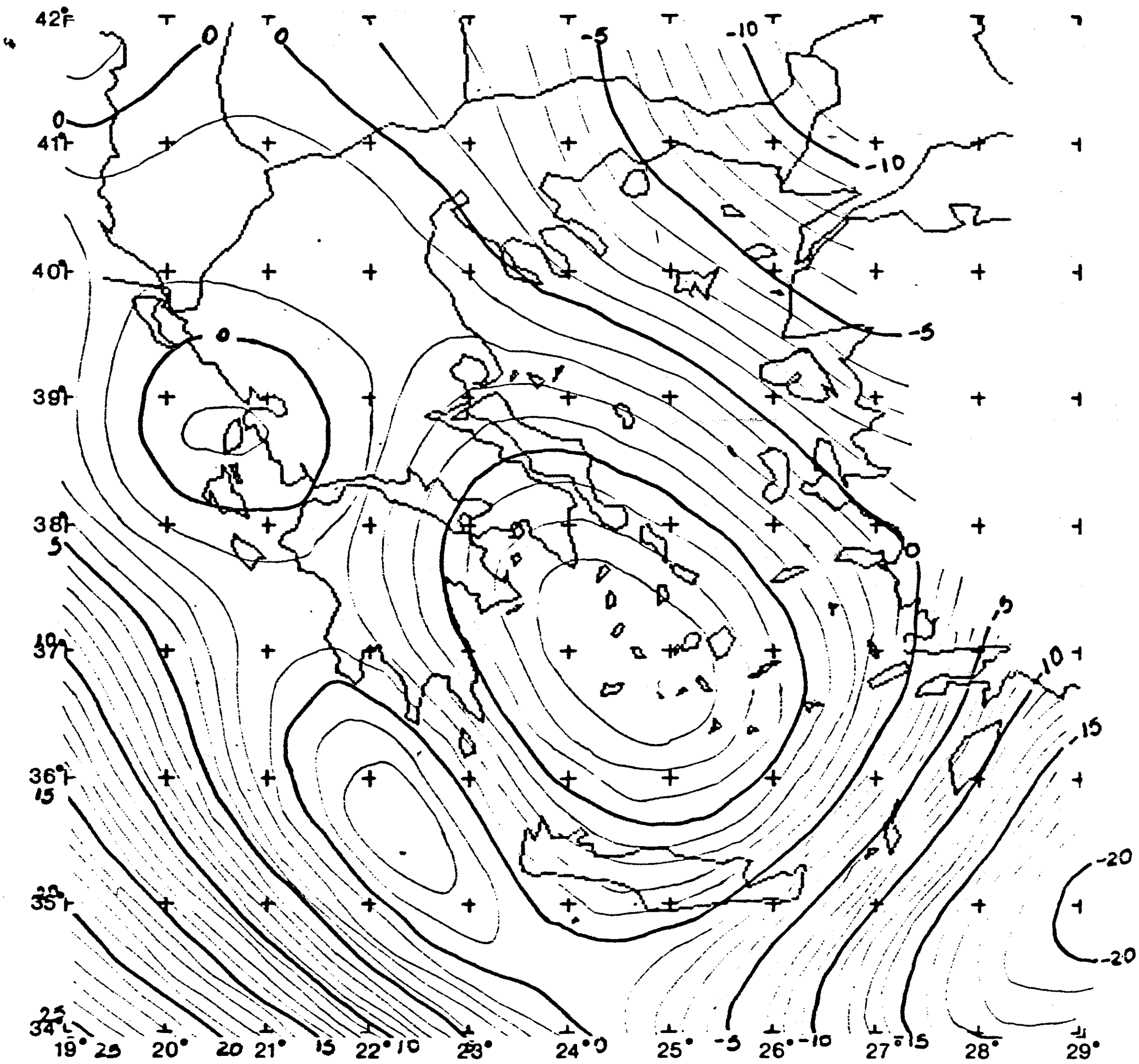
  $X_0 = 500\,000$.

* Ελληνικό ή Ευρωπαϊκό



ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΜΕΝΟ (50Km) ΓΕΩΕΙΔΕΣ, ΑΝΑΦΕΡΟΜΕΝΟ ΣΤΟ ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ΤΟΥ GRS 80 (a=6.378.137 m, f=1/298.25722)

ΣΧ. 3



ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΟ (ΟΜΑΛΟΠΟΙΗΜΕΝΟ) ΓΕΩΕΙΔΕΣ ΣΤΟ ΕΓΣΑ'87

ΣΧ. 4

Το δικτυο Ι^ης ταξεως της ΓΥΣ

(137 σημεία, 720 διευθυνσεις, 17 βασεις, 20 Lapla..

αναγμένο, συνορθωμένο και υπολογισμένο στο

νεο Datum έδωσε αποτελέσματα ιδιαιτερα

ικανοποιητικα σε συγκριση με δορυφορικα (laser,

doppler, GPS) αποτελέσματα σε 30 κοινα σημεία

ΚΑΤΟΠΙΝ ΤΟΥΤΟΥ

Το δικτυο αυτο προσαρμόστηκε με στροφη

($\varepsilon = -0''.16 \pm 0''.06$) και κλίμακα ($\kappa = +1.3 \pm 0.3$ ppm)

στο δορυφορικο που είχε σωστότερο προσανατολισμό

και κλίμακα στο παγκόσμιο σύστημα BTS και

θεωρήθηκε ως βάση για την υλοποίηση του ΕΓΣΑ':

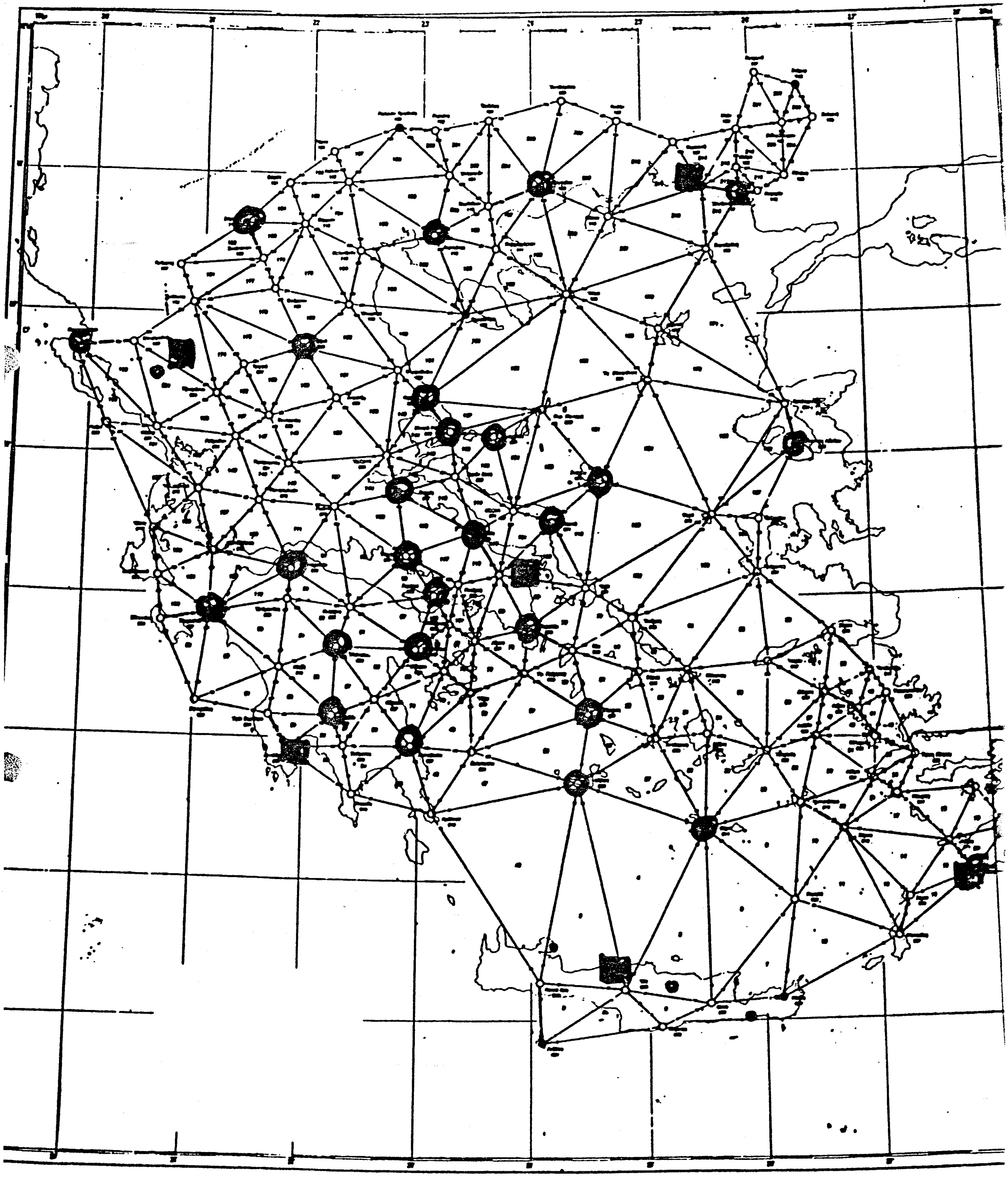
Το δικτυο αυτο έχει συστηματικα σφάλματα

μικρότερα απο 1 ppm

ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΓΕΩΓΡ. ΥΠΗΡ. ΣΤΡΑΤΟΥ

ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΥ ΔΙΚΤΥΟΥ 1ης ΤΑΞΕΩΣ



Σημεία Δορυφορικού Εντοπισμού

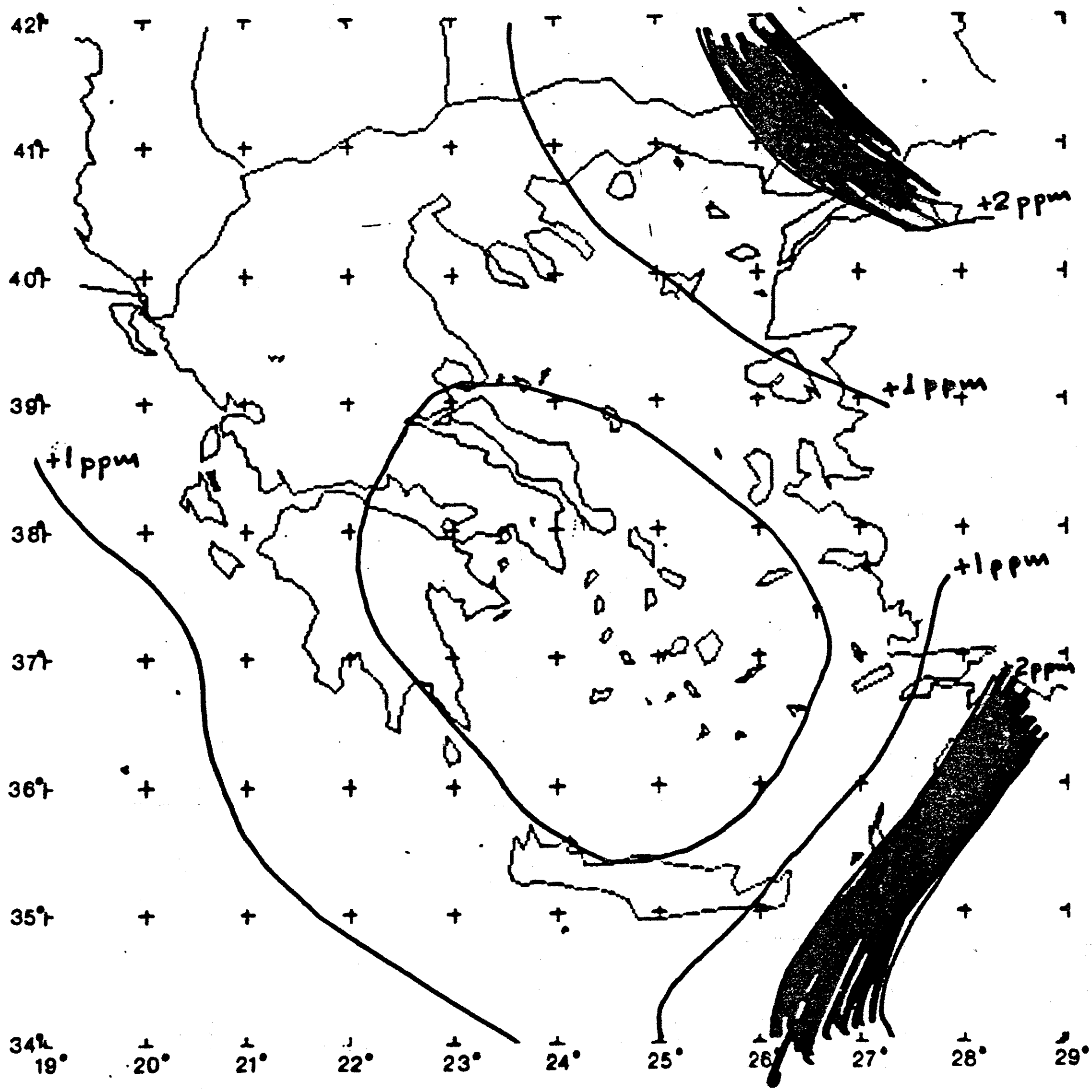
ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΗΜΕΙΩΝ

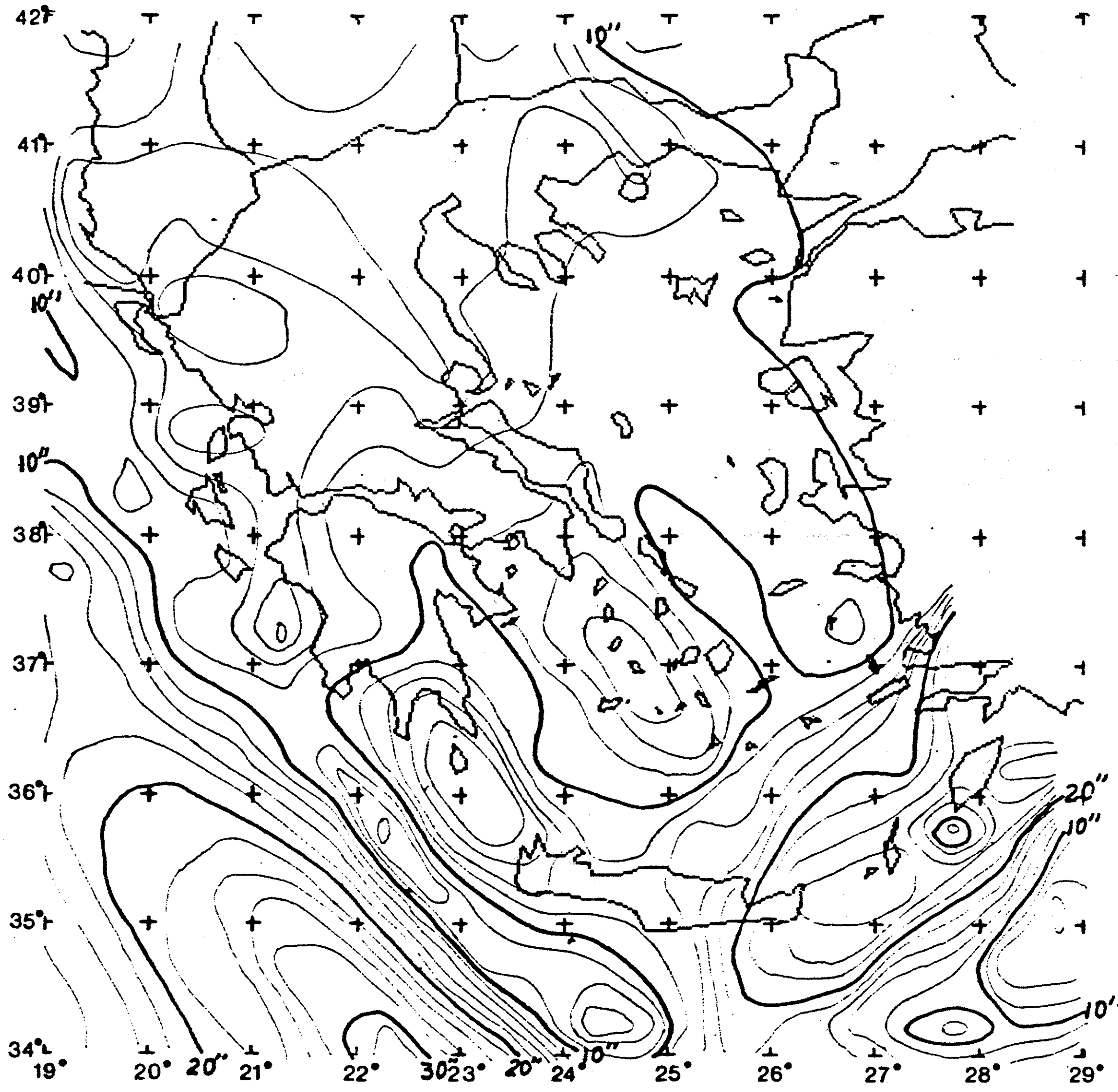
Ιης και ΙΙας ΤΑΞΕΩΣ

ΣΤΟ ΕΓΣΑ'87

(Απόσπασμα)

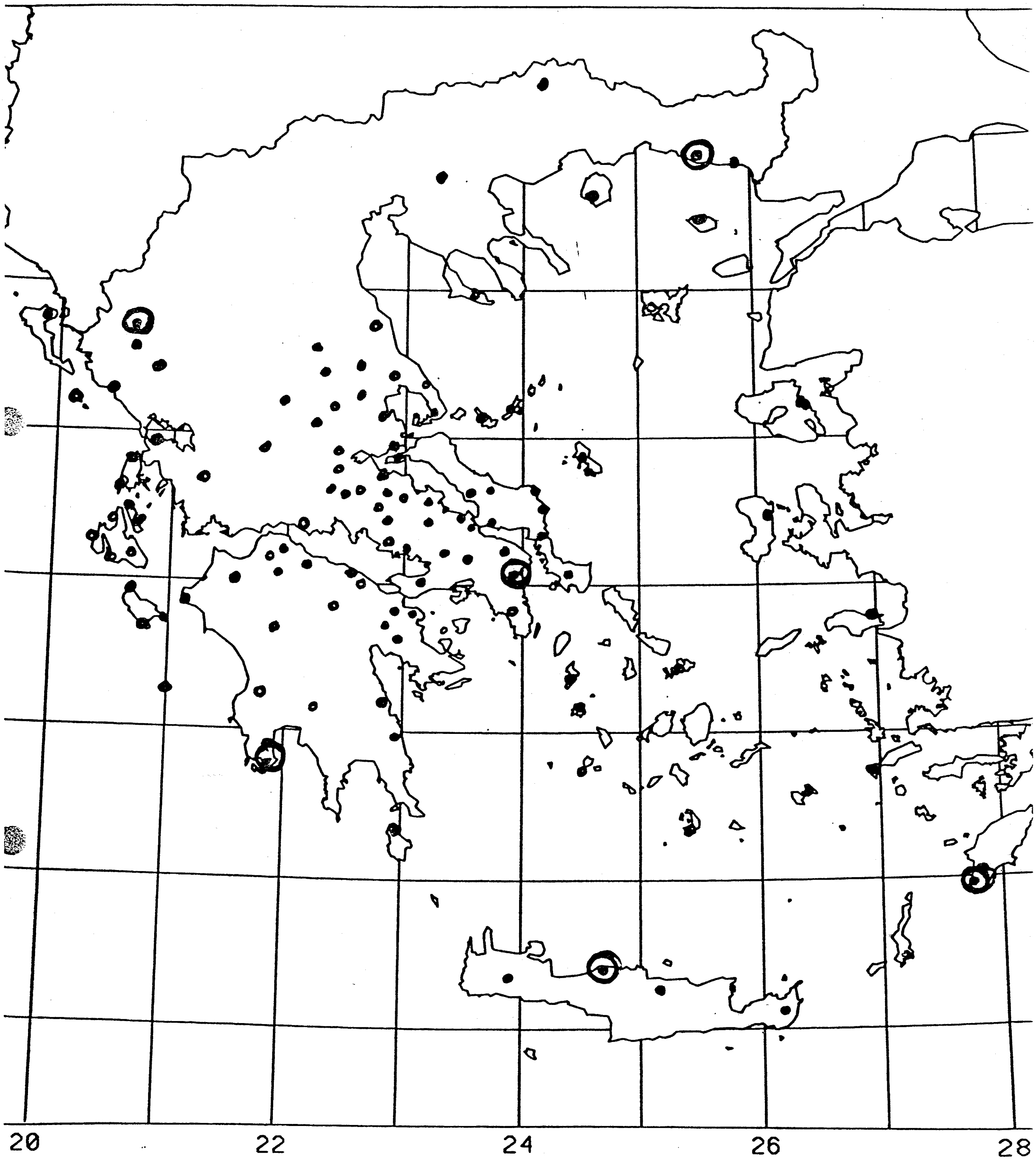
Α/Α ΟΚΧΕ	Αρ. ΓΥΣ	ΟΝΟΜΑ	φ ° ' "	λ ° ' "	X (m)	Y (m)
....		....	....	....	....	....
2167	40890	ΠΥΡΓΟΙ	37 52 19.6714	21 42 27.7848	298381.440	4194104.550
1057	40900	ΧΛΕΜΟΥΤΣΙ	37 53 16.0331	21 8 23.7854	248486.358	4197221.778
2168	50050	ΠΕΡΑΤΗ	37 54 19.2563	24 1 31.6461	502237.948	4195313.681
2169	40910	ΖΕΜΠΗ	37 55 3.7322	22 1 27.4825	326336.706	4198524.520
2170	50051	ΣΑΛΑΜΙΝΑ	37 55 4.3945	23 30 18.0407	456492.758	4196820.008
2171	30350	ΑΓ.ΣΑΡΑΝΤΑ	37 55 54.8264	24 46 43.8713	568444.934	4198544.790
1058	40920	ΚΥΛΛΗΝΗ	37 56 11.2460	22 23 38.9989	358885.976	4199980.781
2172	50060	ΚΑΣΤΕΛΛΑ	37 56 18.0645	23 39 16.2036	469640.689	4199031.276
2173	50070	ΥΜΗΤΤΟΣ	37 56 37.3523	23 48 46.3140	483557.488	4199585.954
2174	50080	ΑΣΤΕΡ.ΑΘΗΝΩΝ	37 58 14.2232	23 42 59.1514	475093.439	4202592.905
2175	40930	ΑΛΥΚΗ	37 58 29.1649	21 15 28.4274	259145.639	4206563.377
1059	40940	ΕΡΥΜΑΝΘΟΣ	37 59 8.4463	21 49 57.8525	309671.974	4206442.197
2176	40950	ΧΕΛΜΟΣ	37 59 15.7904	22 12 2.9173	342003.261	4205979.610
2177	50091	ΚΟΡΥΔΑΛΛΟΣ	37 59 40.2369	23 37 4.0879	466441.491	4205274.822
2178	50120	ΠΕΤΑΛΙΟΙ	37 59 44.3037	24 15 14.1225	522295.091	4205361.672
2179	40960	ΒΑΛΤΣΑ	38 0 24.9932	22 38 28.3112	380709.292	4207456.406
1060	50130	ΓΕΡΑΝΕΙΑ	38 1 3.6747	23 7 47.5712	423623.503	4208134.684
2180	50131	ΜΕΕΛΗ ΝΤΟΥΣΚΙ	38 1 18.7663	23 2 32.4631	415944.997	4208675.311
2181	50150	ΚΛΙΤΣΙΚΑΣ	38 2 0.7244	22 53 2.9859	402075.593	4210123.299
2182	40970	ΠΕΤΑ	38 2 37.3555	21 31 3.6190	282171.104	4213573.721
2183	40980	ΜΑΥΡΑ ΟΡΗ	38 2 44.3874	22 25 7.4163	361250.285	4212061.602
1061	50160	ΟΧΗ	38 3 26.4204	24 27 53.6785	540786.223	4212278.940
0000	00000	DATUM DION	38 4 33.8000	23 55 51.0000	-493933.628	4214255.855
2184	50170	ΠΕΝΤΕΛΗ	38 4 43.8013	23 52 51.6230	489563.870	4214568.524
1062	50180	ΠΑΤΕΡΑΣ	38 5 36.1631	23 21 5.0360	443126.545	4216374.262
1063	50200	ΚΕΦΑΛΛΗΝΙΑ	38 8 2.2953	20 40 9.9429	208078.113	4225922.146
2185	40990	ΣΤΑΥΡΟΣ	38 8 13.8560	21 40 19.7188	295988.332	4223595.985
2186	41000	ΦΤΕΡΗ	38 8 49.5732	22 2 55.4555	329019.244	4223935.430
2187	41001	ΦΤΕΡΗ	38 8 50.0385	22 2 52.9253	328957.954	4223951.065
2188	50210	ΚΛΙΟΣΙ	38 9 27.5106	24 16 40.1857	524340.389	4223342.404
2189	41010	ΚΑΣΤΕΛΙ	38 9 30.3423	22 12 39.3074	343255.881	4224905.467
....		....	....	....	....	....


42
41
40
39
38
37
36
35
34
19°
20°
21°
22°
23°
24°
25°
26°
27°
28°
29°
+2 ppm
+1 ppm
+1 ppm
+1 ppm
+2 ppm



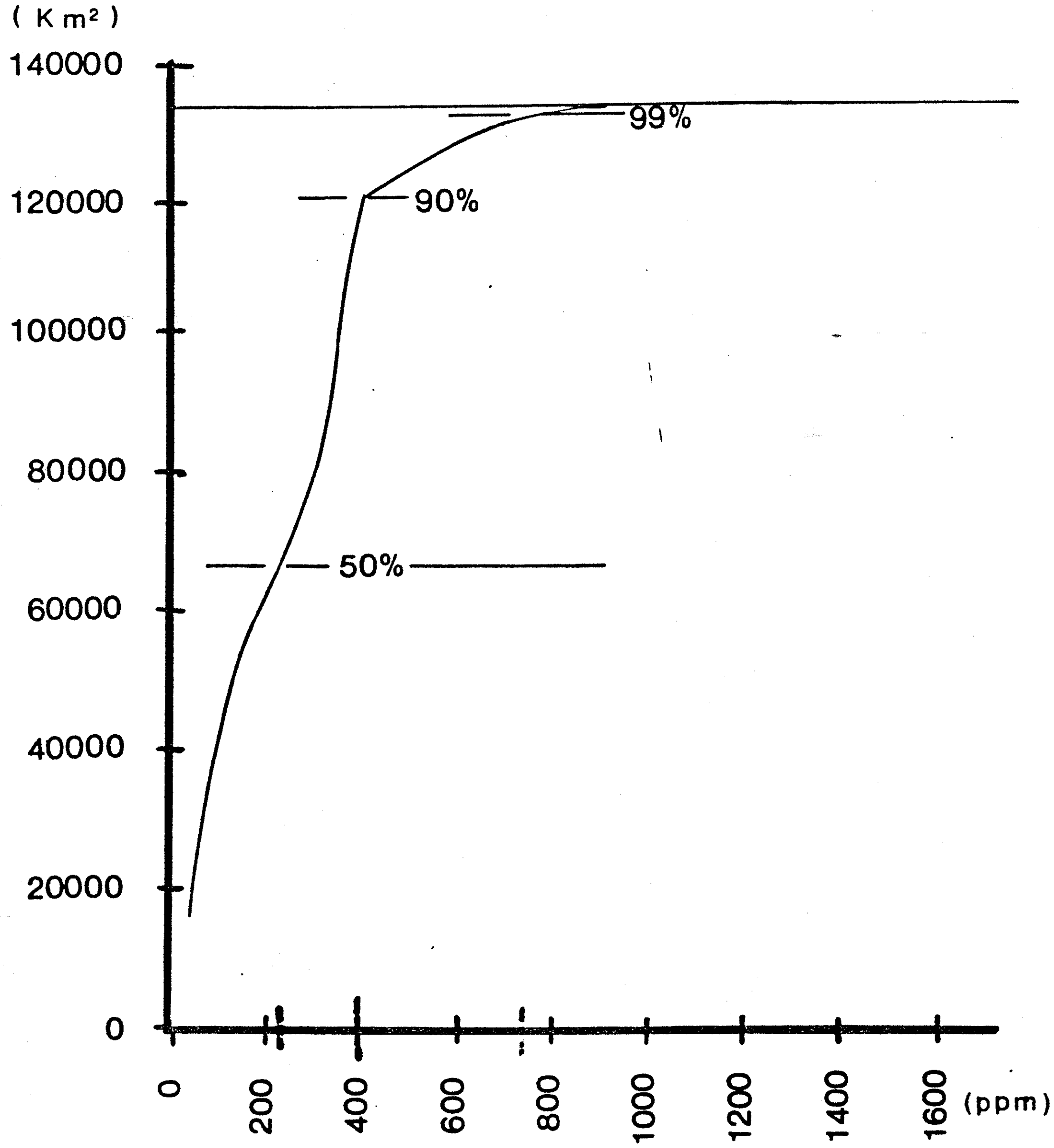
ΑΝΑΜΕΝΟΜΕΝΗ ΟΛΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ Θ ΣΤΟ ΕΓΣΑ ' 87

ΣΧ. 6



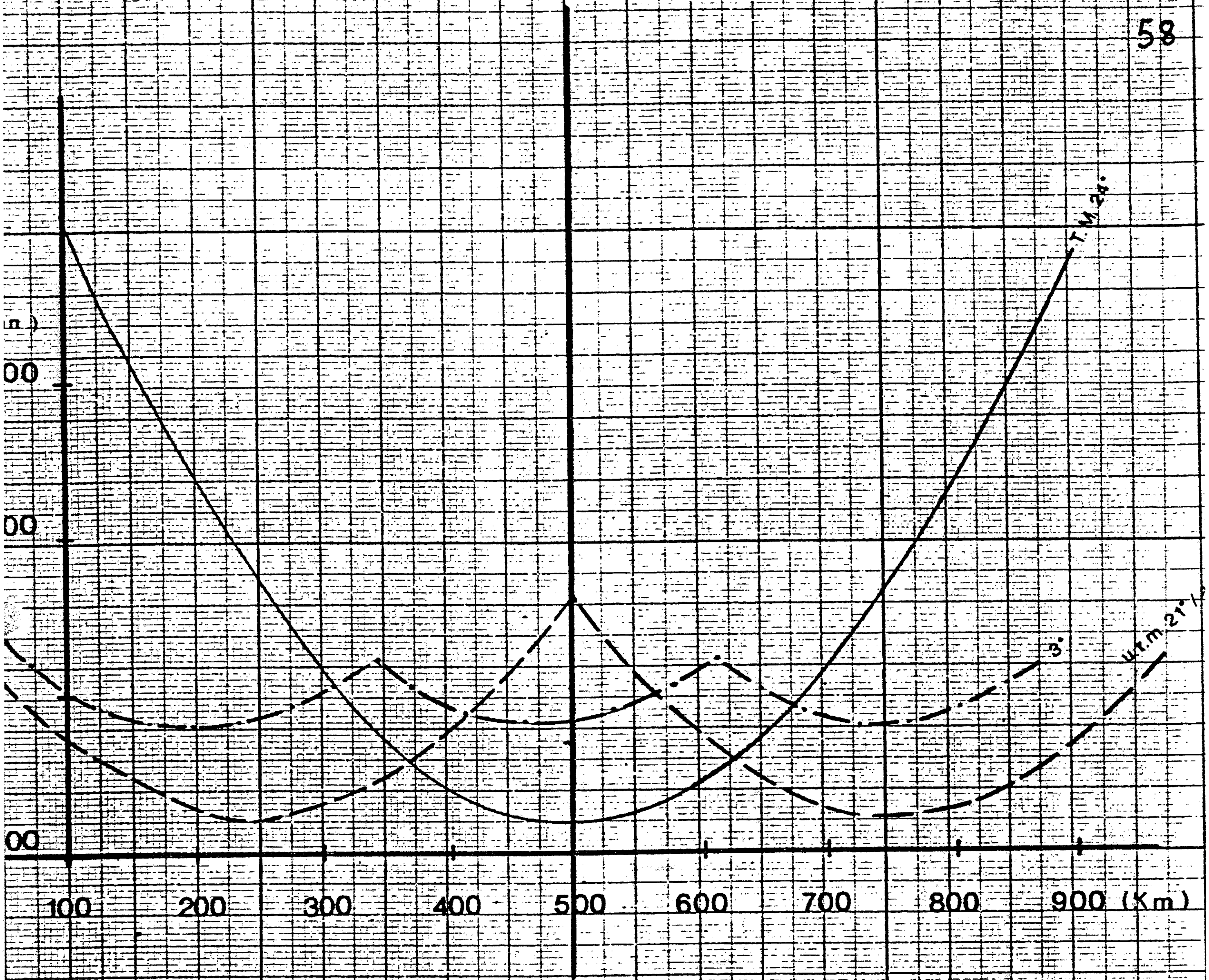
⊙ SLR/GPS stations

• GPS stations



ΚΑΤΑΝΟΜΗ ΤΗΣ ΚΛΙΜΑΚΑΣ ΠΑΡΑΜΟΡΦΩΣΗΣ (κ)
ΣΤΗΝ ΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΧΩΡΑΣ

ΣΧ. 10


T.M. 24°
U.T.M. 21°
3°
n)
00
00
00
100
200
300
400
500
600
700
800
900 (Km)

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ + ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ 1990-91

	ΘΕΩΡΙΑ	ΑΣΚΗΣΕΙΣ
10.90	Εισαγωγή - Ελλειψοειδές εκ περιστροφής	—
10.90	Ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Ελλειψοειδή βάσης στη γεωδ. μεταφορά	Άσκηση 1η (Ελλειψοειδή
.10.90	Γεωδαιτική Μεταφορά	-"-
11.90	Τρισδιάστατη γεωδαιτική μεταφορά-ανάστροφη με βάση απεικονίσεις	Άσκηση 2η (ευθύ αντίστροφο γεωδ. μεταφορά - Puissant)
.11.90	Απεικονίσεις	Άσκηση 2η γεωδ. μεταφ. στο χώρο
.11.90	Δεν έγινε λόγω πορ. Νοέ	—
.11.90	Απεικονίσεις - μέχρι Hatt	Άσκηση 2η Άσκηση 3η
.11.90	Δεν έγινε λόγω πορείας φοιτ.	—
2.90	Δεν έγινε λόγω περιγ. μεσ. γεωδ. μετρ.	—
12.90	Δεν έγινε λόγω καταλήψεις	—
12.90	Δεν έγινε λόγω καταλήψεις	—
	Γενική επανάληψη	
.3.90	Γενική επανάληψη	—

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 1

1. Προκειμενου να υπολογιστει η θεση ενος αγνωστου σημειου απο ενα γνωστο μετραμε την αποσταση και το αζιμουθιο.

Αν η θεση του αγνωστου σημειου θελουμε να προσδιοριστει με ακριβεια 10m, 1m, 1cm, 1mm αντιστοιχα, δωστε την ακριβεια με την οποια πρεπει να μετρηθει το αζιμουθιο (εκφρασμενη σε rad και arcsec) και η αποσταση (εκφρασμενη σε ppm) για σημεια που απεχουν 1, 10, 20, 50, 100 και 200km μεταξυ τους.

Συγκρινατε την σχεση των rad και ppm.

2. Προσδιοριστε το μηκος τοξου 1 arcsec σε μετρα κατα μεσημβρινο και παραλληλο στην περιοχη Ηρακλειου, Αθηνων και Θεσσαλονικης στο συστημα GRS-80. Επαναλαβετε την διαδικασια για τα ιδια πλατη, χρησιμοποιωντας την μεση ακτινα καμπυλοτητας.

Δινονται:

$a = 6\ 378\ 137$ m

$1/f = 298.257\ 222\ 1$

$e^2 = 0.006\ 694\ 380\ 023$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

$R_G^2 = \rho N$

Εαν θελουμε να χρησιμοποιησουμε, για απλουστευση, μια και μονο, ενιαια για ολη την Ελλαδα, τιμη για το μηκος τοξου 1 arcsec στο μεσημβρινο και παραλληλο, ποια πρεπει να ειναι αυτη η τιμη και για ποσης ακριβειας υπολογισμους μπορει να χρησιμοποιηθει.

Δεδομενου οτι η μεταβολη του μηκους τοξου 1 arcsec στον παραλληλο ειναι μεγαλη για την εκταση της χωρας, τι μπορει να γινει ωστε να βελτιωθει η ακριβεια της χρησιμοποιουμενης τιμης.

3. Η σχεση που προσδιοριζει το μηκος τοξου στον μεσημβρινο, απο τον ισημερινο μεχρι πλατους φ, ειναι η επομενη (σχεση 1):

$$M = a(1-e^2)\ (M_0\varphi - M_2\sin2\varphi + M_4\sin4\varphi - M_6\sin6\varphi + M_8\sin8\varphi - \ldots)$$

οπου:

$$M_0 = 1 + 3/4\ e^2 + 45/64\ e^4 + 175/256\ e^6 + 11025/16384\ e^8 + \ldots$$

$$M_2 = 3/8\ e^2 + 15/32\ e^4 + 525/1024\ e^6 + 2205/4096\ e^8 + \ldots$$

$$M_4 = 15/256\ e^4 + 105/1024\ e^6 + 2205/8820\ e^8 + \ldots$$

$$M_6 = 35/3072\ e^6 + 315/12288\ e^8 + \ldots$$

$$M_8 = 315/130784\ e^8 + \ldots$$

α. Να απλουστευθει η σχεση 1 για το GRS-80 οσο το δυνατο περισσοτερο.

β. Δωστε την ταξη μεγεθους του καθε ορου της μορφης $a_i e^{2i}$ για τον υπολογισμο των M_i οπου i=0,2,4,6,8.

γ. Ποιους ορους M_i, της σειρας που δινει το M, πρεπει να χρησιμοποιησουμε και μεχρι ποια δυναμη του e στον καθε ορο ωστε η ακριβεια προσδιορισμου του τοξου μεσημβρινου μεχρι πλατος φ=42° (το μεγιστο για τον ελληνικο χωρο), να ειναι αντιστοιχα 20, 0.05, 0.01, 0.001m.

* Οπου ειναι δυνατο να πινακοποιηθουν τα αποτελεσματα.

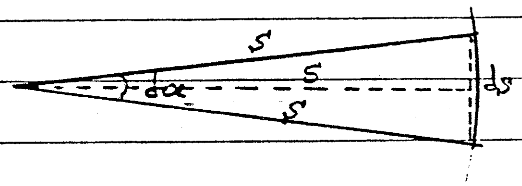
Παραδοση: 01/11/90

ΓΒ/ΧΛ/ΒΜ 17/10/90

ΣΙΑΝΤΙΚΟΣ ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ

7ο ΕΞΑΜΗΝΟ.

Για δεδομένη απόσταση S και για μια επιθυμητή ακρίβεια dS η ακρίβεια με την οποία πρέπει να μετρηθεί το αζιμούθιο είναι:



$$d\alpha = \frac{dS}{S} \quad (\text{σε rad})$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο για μικρές γωνίες διότι σε μεγάλη η ακτίνα καμπυλότητας δεν είναι ίδια σ' όλα τα σημεία του τόξου και επομένως δεν ισχύει. Εδώ όπου dα είναι πολύ μικρό το τόξο dS είναι ίσο με την χορδή.

Σε δεδομένη απόσταση S και επιθυμητή ακρίβεια α, η ακρίβεια dS με την οποία πρέπει να μετρηθεί η S σε ppm δίνεται

$$dS = \frac{a * 1.000\,000}{S}$$

Έτσι διαμορφώνουμε τον παρακάτω πίνακα:

ΑΣΗ	10 m			1 m			1 cm			1 mm	
	ΑΖΙΜΟΥΘΙΟ		[S]	ΑΖΙΜΟΥΘΙΟ		[S]	ΑΖΙΜΟΥΘΙΟ		[S]	ΑΖΙΜΟΥΘΙΟ	
	rad	arcsec	ppm	rad	arcsec	ppm	rad	arcsec	ppm	rad	arcsec
km	0,01	2062″,65	10.000	0,001	206″,265	1000	0,00001	2″,06265	10	10^{-6}	0″,206265
10 -״-	0,001	206″,265	1.000	0,0001	20″,6265	100	0,000001	0″,2063	1	0,0000001	0″,0206
0 -״-	0,0005	103,132	500	0,00005	10″,3132	50	0,0000005	0″1031	0,5	0,00000005	0″,0103
0 -״-	0,0002	41,253	200	0,00002	4″,12530	20	0,0000002	0″,0413	0,2	0,00000002	0″,0041
0 -״-	0,0001	20″,6265	100	0,00001	2″,06265	10	0,0000001	0″,0206	0,1	0,00000001	0″,0021
10 -״-	0,00005	10″,3132	50	0,000005	1″,03132	5	$5 \cdot 10^{-8}$	0,0103	0,05	$5 \cdot 10^{-9}$	0″,00103

Σημείωση ότι 1 arcsec = 206265 rad (= ρ″ rad)

Σημειώνεται το PPM / RAD λαμβάνεται ότι είναι ίσο με 10^6

Το μήκος τόξου dm κατά μεσημβρινό είναι:

$dm = \rho \cdot d\varphi$ (1), ρ: ακτίνα καμπυλότητας της μεσημβρινής τομής
$d\varphi$ σε rad

Το μήκος τόξου $dP = r \cdot d\lambda$, όπου $r = N\cos\varphi$
N = ακτ. καμπυλότητας της κυρίας κάθετης τομής

Άρα:

$dP = N \cdot \cos\varphi \cdot d\lambda$ (2) ($d\lambda$ σε rad)

Με σχέσεις της άσκησης υπολογίζω τις ρ, N, R_G για: ΗΡΑΚΛΕΙΟ ($\varphi = 35°$)
ΑΘΗΝΑ ($\varphi = 38°$)
ΘΕΣ/ΝΙΚΗ ($\varphi = 41°$)

φ	ρ (m)	N (m)	R_G (m)	r (m)
35°	6356426,696	6385172,175	6370763,223	5 230 426.840
38°	6359629,652	6386244,475	6372923,170	5 032 429.321
41°	6362920,219	6387345,731	6375121,277	4 820 591.016

Με την μέση ακτίνα καμπυλότητας R_G, τα μήκη τόξου είναι:
$dm = R_G \cdot d\varphi$, $dP = R_G \cdot \cos\varphi \, d\lambda$

Δεδομένου ότι 1 δεύτερο = 1/206265 rad λαμβάνουμε τα εξής αποτελέσματα.

φ	ΜΗΚΟΣ ΚΑΤΑ ΜΕΣΗΜΒΡΙΝΟ		ΜΗΚΟΣ ΚΑΤΑ ΠΑΡΑΛΛΗΛΟ	
	$dm = \rho \cdot d\varphi$ [m]	$dm = R_G \, d\varphi$ [m]	$dP = N\cos\varphi \, d\lambda$ [m]	$dP = R_G \cdot \cos\varphi \, d\lambda$ [m]
35°	30,817	30,886	25,358	25,301
38°	30,832	30,897	24,398	24,347
41°	30,848	30,907	23,371	23,326

Όπως φαίνεται στον παραπάνω πίνακα, μπορώ να πάρω σαν ενιαία τιμή για μήκος τόξου 1arcsec στο μεσημβρινό την τιμή που αντιστοιχεί σε $\varphi = 38^\circ$ δηλ. την $dm = 30,832$. Έχοντας αυτή την τιμή σαν ενιαία έπεται ότι το μήκος 1arcsec κατά μεσημβρινό, μεταβάλλεται πλείον $\pm 0,015m$ στο εύρος $35^\circ \sim 41^\circ$. Η ακρίβεια που δίνει αυτή η τιμή είναι $\frac{0,015}{30.832} \approx \frac{1}{2000}$ ή 500 ppm

Ανάλογα για το μήκος τόξου 1arcsec κατά παράλληλο παίρνω ενιαία τιμή την 24.398 που αντιστοιχεί στο $\varphi = 38^\circ$. Η μεταβολή αυτής της τιμής από $35^\circ \sim 41^\circ$ είναι πλείον 1m. Η δε ακρίβεια που δίνει στους υπολογισμούς είναι:

$$\frac{1}{24.398} \approx \frac{1}{25} \text{ ή } 40.000 \text{ PPM}$$

- Το μήκος τόξου κατά παράλληλο δίνεται: $dP = N \cos\varphi \cdot d\lambda$. Για να βελτιωθεί η ακρίβεια της χρησιμοποιούμενης τιμής για το 1arcsec μπορώ να δίνω την τιμή του $N_{\varphi=38^\circ}$ και στα πλάτη των 35° και 41° οπότε έχω:

Για $\varphi = 35^\circ \rightarrow dP = N_{38^\circ} \cos\varphi_{35^\circ} \, d\lambda \Rightarrow dP = 25,362m$

Για $\varphi = 41^\circ \rightarrow dP = N_{38^\circ} \cos\varphi_{41^\circ} \, d\lambda \Rightarrow dP = 23,368m$

Παρατηρώ ότι η διαφορά των dP από την πραγματική τιμή είναι πλείον $\pm 0,004m$. Άρα η ακρίβεια έχει βελτιωθεί και είναι:

$$\frac{0,004}{24.398} \approx \frac{1}{6000} \text{ ή } 170 \text{ PPM}$$

(8) Για να βρω την τάξη μεγέθους κάθε όρου της μορφής $a_i e^{2i}$, βρίσκω την τιμή $a_i e^{2i}$, την πολ/ζω με 10^6 και βλέπω πόσα pp. είναι ο κάθε όρος

GRS'80 $a(1-e^2) = 6\,335\,439.32$

	a_0e^0 (PPM)	a_1e^2 (PPM)	a_2e^4 (PPM)	a_3e^6 (PPM)	a_4e^8 (PPM)
M_0	1.000.000	5.02×10^{3} 5021	3.15×10^{5} 31,5	2.05×10^{-7} 0,2	1.34×10^{-9} 0,0013
M_2	0	2.51×10^{-3} 2510	2.10×10^{-5} 21	1.53×10^{-7} 0,15	1.08×10^{-9} 0,0011
M_4	0	0	2.63×10^{-6} 2,63	3.08×10^{-8} 0,031	5.02×10^{-10} 0,0005
M_6	0	0	0	3.42×10^{-9} 0,0034	5.15×10^{-11} 0,00005
M_8	0	0	0	0	4.84×10^{-12} 0,000005

Πολλαπλασιάζω κάθε όρο των M_0, M_2, M_4, M_6, M_8 με $\alpha(1-e^2)\varphi$, $\alpha(1-e^2)\sin2\varphi$, $\alpha(1-e^2)\sin4\varphi$, $\alpha(1-e^2)\sin6\varphi$, $\alpha(1-e^2)\sin8\varphi$ αντίστοιχα και έχω την τάξη μεγέθους σε μέτρα των επιμέρους όρων για τον υπολογισμό του M. Έτσι έχω τον ακόλουθο πίνακα.

	Όρος με e^0 [m]	Όρος με e^2 [m]	Όρος με e^4 [m]	Όρος με e^6 [m]	Όρος με e^8 [m]
	4644119,589	23317,126	146,337	0,952	0,006
	0	15817,313	132,359	0,969	0,007
	0	0	3,459	0,041	0,0001
	0	0	0	0,021	0,000
	0	0	0	0	0,0001

ότι Ακρίβεια 20m: κρατάω M_0 μέχρι και e^4, M_2 μέχρι και e^4

-//- 0,05 m κρατάω M_0 μέχρι και e^6, M_2 μέχρι και e^6, M_4 μέχρι και e^4

-//- 0,001 m : κρατάω M_0, M_2 μέχρι και e^8, M_4 και M_6 μέχρι και e^6

-//- 0,01 m : κρατάω M_0, M_2, M_4, M_6 μέχρι και e^6

Αντικαθιστώ τα α, e^2, M_i, $i=0,2,4,6,8$ με τα του GRS-80 οπότε η σχέση μας γίνεται:

$$M = 6,367449146\cdot10^6\cdot\varphi - 1,603850869\cdot10^4\cdot\sin2\varphi + 1,663406637\times10^1\sin4\varphi - 2,198049656\cdot10^{-2}\cdot\sin6\varphi + 3,064602306\cdot10^{-5}\cdot\sin8\varphi$$

Διατηρώντας την τάξη μεγέθους του κάθε όρου και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι η μεγαλύτερη τιμή του $\sin \alpha\varphi$ $(\alpha = 2, 4, 6, 8)$ είναι ± 1 [illegible] [illegible] [illegible] σαν σχήμα:

$$M = 6{,}367449146 \cdot 10^{6} \cdot \varphi - 1{,}6038509 \cdot 10^{4} \cdot \sin 2\varphi + 1{,}68341 \cdot 10 \cdot \sin 4\varphi - 2{,}20 \cdot 10^{-2} \cdot \sin 6\varphi$$

M_1	20m	0.05	0.01	0.001	m
M_0	3	4	4	5	
M_2	2	3	3	4	
M_4		2	2	3	
M_6			1	1...	
M_8					

ΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ
ΞΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 2

. Οι ελλειψοειδείς γεωδαιτικές συντεταγμένες του Κεντρικού άθρου (CP) του Κέντρου Δορυφόρων του Διονύσου (ΚΔΔ) στο σύστημα ΓΣΑ'87 είναι:

φ= 38 04 33.8000
λ= 23 55 51.0000
h= 481.67

ο σύστημα ΕΓΣΑ'87 χρησιμοποιεί το ελλειψοειδές GRS'80 a=6 378 137m και 1/f=298.2572221).Το Ελληνικό (παλαιό) Σύστημα ναφοράς (GD) που χρησιμοποιεί το ελλειψοειδές του Bessel a=6 377 397.155 και 1/f=299.153) μπορεί να θεωρηθεί παράλληλο ρος το ΕΓΣΑ'87.

Το κέντρο του ΕΓΣΑ'87 διαφέρει από αυτό του GD κατά:

ΔX= -655.22	$X_{GD} = X_{ΕΓΣΑ} + ΔX$
ΔY= -299.35	$Y_{GD} = Y_{ΕΓΣΑ} + ΔY$
ΔZ= -252.09	$Z_{GD} = Z_{ΕΓΣΑ} + ΔZ$

που X,Y,Z είναι οι καρτεσιανές γεωδαιτικές συντεταγμένες του σημείου στα δύο συστήματα αντίστοιχα.

Ζητείται η μετατροπή των συντεταγμένων (φ,λ,h) του κεντρικού άθρου (CP) από το σύστημα ΕΓΣΑ'87 στο GD. Στη διαδικασία ροσδιορισμού των φ,λ,h απο τα X,Y,Z απαιτούνται διαδοχικές ροσεγγίσεις. Ξεκινήστε τις προσεγγίσεις αυτές με αρχική τιμή ου h=0, δώστε το πλήθος των προσεγγίσεων και την τάξη μεγέθους ης κάθε διόρθωσης. Σταματείστε τις διαδοχικές προσεγγίσεις όταν ι διόρθωση είναι μικρότερη από 0".0001 ή 0.001 m.

. Με τη γεωδαιτική μεταφορά (ευθύ πρόβλημα) προσδιορίζονται οι συντεταγμένες ενός σημείου ($φ_2,λ_2$) και το γεωδαιτικό αζιμούθιο $_{21}$ όταν δίνονται οι συντεταγμένες ενός σημείου $φ_1,λ_1$, η πλευρά $_{12}$ και το αζιμούθιο A_{12}.

Μία μέθοδος για τον προσδιορισμό των συντεταγμένων $φ_2,λ_2$ είναι ι χρήση των τύπων του Puissant. Οι τύποι αυτοί έχουν προκύψει από ανάλυση σε σειρά και προσδιορίζουν με ικανοποιητική ακρίβεια για γεωδαιτικές εφαρμογές τις συντεταγμένες για μήκη πλευρών της τάξης των 40-50 Km.

Τύποι του Puissant

$$Δφ=1/ρ_1*S_{12}*\cos A_{12} - (\tan φ_1/(2N_1ρ_1))*S_{12}*\sin^2 A_{12} -$$

$$-(1+3\tan^2 φ_1/(6N_1^2))*1/ρ_1*S_{12}^3*\sin^2 A_{12}*\cos A_{12}-$$

$$-3/2 * (e^2*\sin φ_1*\cos φ_1)/(1-e^2*\sin^2 φ_1)*(Δφ_0)^2$$

Το $Δφ_0$ υπολογίζεται ικανοποιητικά από τους 3 πρώτους όρους.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 3

Οταν ειναι γνωστες οι ελλειψοειδεις γεωδαιτικες συντεταγμενες των σημειων 1 και 2 μπορουμε χρησιμοποιωντας το αντιστροφο προβλημα της γεωδαιτικης μεταφορας να προσδιορισουμε την αποσταση S_{12} (μηκος γεωδαισιακης γραμμης) καθως και τα γεωδαιτικα αζιμουθια A_{12} και A_{21}.

Ενας τροπος προσδιορισμου της αποστασης και των γεωδαιτικων αζιμουθιων ειναι με την αντιστροφη χρηση των τυπων του Puissant. Οι τυποι αυτοι ειναι ικανοποιητικοι για γεωδαιτικες εφαρμογες για μηκη πλευρων μεχρι περιπου 50 Km και ειναι οι παρακατω :

$$S_{12} \sin A_{12} = N_2 \, \Delta\lambda \, \cos\varphi_2 \, (1 + S_{12}^2/(6N_2^2) - (\Delta\lambda^2/6))$$

$$\begin{aligned} S_{12} \cos A_{12} = {} & \rho_1 \Delta\varphi + \tan\varphi_1/2N_1 \, (S_{12} \sin A_{12})^2 \\ & + ((1+3\tan^2\varphi_1)/(6N_1^2)) \, (S_{12} \sin A_{12})^2 \, (S_{12} \cos A_{12}) \\ & + (3/2)\rho_1 (e^2 \sin\varphi_1 \cos\varphi_1)/(1-e^2\sin^2\varphi_1) \, \Delta\varphi^2 \end{aligned}$$

$$\tan A_{12} = (S_{12} \sin A_{12})/(S_{12} \cos A_{12})$$

$$S_{12} = ((S_{12} \sin A_{12})^2 + (S_{12} \cos A_{12})^2)^{1/2}$$

$$\Delta A = \Delta\lambda \sin\varphi_m \sec(\Delta\varphi/2) + (\Delta\lambda^3/12) \, (\sin\varphi_m - \sin^3\varphi_m)$$

Αν οι συντεταγμενες του πρωτου σημειου ειναι :

$$\varphi_o = 38^\circ \; 04' \; 33''.800$$
$$\lambda_o = 23^\circ \; 55' \; 51''.000$$

υπολογιστε την αποσταση και τα γεωδαιτικα αζιμουθια , στο συστημα GRS 80 (a = 6 378 137 m και 1/f = 298.257222101) , προς τα σημεια με ελλειψοειδεις γεωδαιτικες συντεταγμενες :

	φ	λ
1	38° 10' 20".157	24° 07' 13".524
2	38° 12' 33".163	23° 47' 18".823
3	37° 54' 10".656	24° 04' 21".752
4	37° 57' 13".743	23° 46' 59".443

Παραδοση : 23/11/89
ΓΒ/ΧΛ/ΒΜ 07/11/89

ΣΙΑΝΤΙΚΟΣ ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ

8° ΕΞΑΜ. Τ.Α.Τ.Μ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑΣ
ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 5
(Μέρος Α)

Δίνονται οι συντεταγμένες του σημείου 1, στο Σύστημα Αναφοράς ΕΓΣΑ-87, που βασίζεται στο ελλειψοειδές του GRS-80 (a = 6378137 m, 1/f = 298.2572221),

$\varphi = 39^\circ\ 43'\ 04.518''$
$\lambda = 20^\circ\ 39'\ 04.637''$

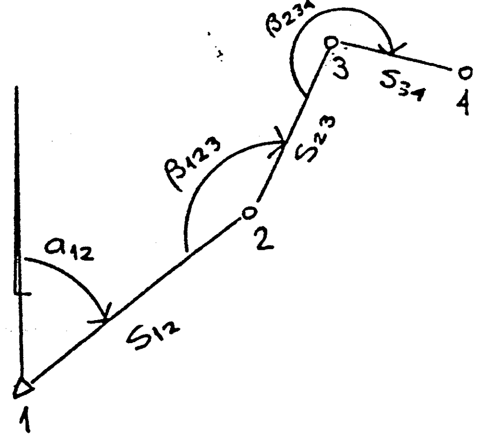
Ζητείται να υπολογισθούν οι συντεταγμένες του σημείου στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή, που χρησιμοποιεί το ΕΓΣΑ-87 σαν σύστημα απεικόνισης (κεντρικός μεσημβρινός $\lambda_o = 24^\circ$, με κλίμακα σε αυτόν $K_o = 0.999600$).

ΓΒ/ΕΠ/ΔΠ 140591

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑΣ
ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 5
(Μέρος Β)

Στο σχήμα δίνεται μια ανοικτή όδευση με τέσσερις κορυφές.



Στην όδευση αυτή είναι γνωστές οι συντεταγμένες X_1, Y_1 του σημείου 1 (Ασκηση 5, Μέρος Α) στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή στο σύστημα ΕΓΣΑ-87, η γωνία διευθύνσεως α_{12} καθώς και οι μετρημένες γωνίες β_{123}, β_{234} και αποστάσεις S_{12}, S_{23}, S_{34}.

α_{12}	= 65^g.33870	S_{12}	= 21187.47 m
β_{123}	= 160^g.87806	S_{23}	= 25207.59 m
β_{234}	= 229^g.14108	S_{34}	= 4128.44 m

Ζητούνται οι καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων 2, 3, 4 στην Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή στο ΕΓΣΑ-87, οι γεωδαιτικές συντεταγμένες του σημείου 4 στο ίδιο σύστημα και το γεωδαιτικό αζιμούθιο A_{12}.

Σημείωση : Οι αποστάσεις και οι γωνίες έχουν ήδη αναχθεί στο ελλειψοειδές.

ΓΒ/ΕΠ/ΔΠ/210591

ΣΙΑΝΤΙΚΟΣ ΓΕΡΑΣΙΜΟΣ
8ο ΕΞΑΜ. Τ.Α.Τ.Μ

ΛΥΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ 5 (ΜΕΡΟΣ Α')

Οι τύποι μετατροπής των γεωδαιτικών συν/νων (φ,λ) σε επίπεδες καρτεσιανές συν/νες Ε.Μ.Π (x,y) δίδονται από τις σχέσεις:

$$x = x_0 + k_0 \cdot N \cdot \cos\varphi \cdot \Delta\lambda + k_0 (N/6) \cos^3\varphi (1 - \tan^2\varphi + e'^2 \cos^2\varphi) \cdot \Delta\lambda^3 + ((k_0 N \cos^3\varphi)/120)(5 - 18\tan^2\varphi + \tan^4\varphi + 14 e'^2 \cos^2\varphi - 58 e'^2 \sin^2\varphi)\Delta\lambda^5$$

$$y = k_0 M + k_0 (N/2)\cos\varphi \sin\varphi \, \Delta\lambda^2 + k_0 (N/24)\sin\varphi \cdot \cos^3\varphi (5 - \tan^2\varphi + 9e' \cos^2\varphi)\Delta\lambda^4 + k_0 (N/720)\sin\varphi \cdot \cos^5\varphi (61 - 58\tan^2\varphi + \tan^4\varphi)\Delta\lambda^6$$

όπου: k_0 = συντελεστής κλίμακας στον κεντρικό μεσημβρινό = 0,999600
x_0 = συμβατική τετμημένη κεντρικού μεσημβρινού = 500.000 m
M = τόξο μεσημβρινού από πλάτος φ_0 έως φ (εδώ $\varphi_0 = 0°$).
και δίνεται από την σχέση:

$$M = a(1 - e^2)(M_0 \varphi - M_2 \sin 2\varphi + M_4 \sin 4\varphi - M_6 \sin 6\varphi + M_8 \sin 8\varphi)$$ όπου

$$M_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + 11025/16384 \, e^8$$

$$M_2 = 3/8 \, e^2 + 15/32 \, e^4 + 525/1024 \, e^6 + 2205/4096 \, e^8$$
$$M_4 = 15/256 \, e^4 + 105/1024 \, e^6 + 2205/16820 \, e^8$$
$$M_6 = 35/3072 \, e^6 + 315/12288 \, e^8$$
$$M_8 = 315/130784 \, e^8$$

Επίσης: $e^2 = 0,006694380023$ $N = 6386872,322$ m
$e'^2 = 0,006739496755$

Αντικαθιστώντας στους παραπάνω τύπους παίρνω για το σημείο 1.

$$x_1 = 212951,9751 \text{ m}$$
$$y_1 = 4401813,6713 \text{ m}$$

(ΜΕΡΟΣ Β')

1/ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΠΡΟΣΩΡΙΝΩΝ ΣΥΝ/ΝΩΝ ΤΩΝ ΚΟΡΥΦΩΝ 2, 3, 4

Αρχικά χωρίς να κάνω καμμία αναγωγή των μετρηθέντων μηκών υπολογίζω τις συν/σεις των κορυφών 2, 3, 4.

Έχω: $\alpha_{12} = 65^g,33870$, $S_{12} = 21187,47$ m

Άρα:

$$x_2 = x_1 + S_{12} \cdot \cos\alpha_{12} = 231075,90 \text{ m}$$
$$y_2 = y_1 + S_{12} \sin\alpha_{12} = 4412787,82 \text{ m}$$

Ανάλογα έχω: $\alpha_{23} = \alpha_{12} + \tilde{\beta}_{123} = 26^g,21676$

$$x_3 = 241165,76 \text{ m}$$
$$y_3 = 4435887,99 \text{ m}$$

και $\alpha_{34} = \alpha_{23} + \tilde{\beta}_{234} = 55^g,35784$

$$x_4 = 244320,07 \text{ m}$$
$$y_4 = 4438551,51 \text{ m}$$

2/ ΑΝΑΓΩΓΕΣ ΜΕΤΡΗΘΕΝΤΩΝ ΜΕΓΕΘΩΝ

α. Αναγωγές γωνιών

(1) Γωνία $\widetilde{\beta_{123}}$

Έχω: $x_{1/3\,(21)} = 0{,}225$ Mm

$\delta_{21} = 7'',836\,(Y_2 - Y_1)(x_{1/3} - 0{,}5) = -23^{cc},648$

$x_{1/3\,(23)} = 0{,}234$ Mm

$\delta_{23} = 48^{cc},149$

Άρα: $\overline{\beta_{123}} = \widetilde{\beta_{123}} + (\delta_{23} - \delta_{21}) = 160^{g},8852397$

(2) Γωνία $\widetilde{\beta_{234}}$

$x_{1/3\,(32)} = 0{,}238$ Mm

$\delta_{32} = -47^{cc},425$

$x_{1/3\,(34)} = 0{,}242$ Mm

$\delta_{34} = 5^{cc},385$

$\overline{\beta_{234}} = \widetilde{\beta_{234}} + (\delta_{34} - \delta_{32}) = 229^{g},146361$

β. Αναγωγές μηκών

(1) Μήκος S_{12}

$K = k \cdot 10^{-6} + 1$, $\quad k = 12311\,(x - 0{,}5)^2 - 400$, $\quad x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$

Είναι: $x_{12} = 0{,}222$ Mm

$k = 551{,}3479247$

$K = 1{,}000551348$

Άρα: $\overline{S_{12}} = S_{12} \cdot K = 21199{,}15$ m

(2) Μήκος S_{23}

$x_{23} = 0{,}236$ Mm

$k = 457{,}2422156$

$K = 1{,}000457242$

$\overline{S_{23}} = S_{23} \cdot K = 25219{,}116$ m

(3) Πλευρά S_{34}

$x_{34} = 0,243$ Mm

$k = 414,756849$

$k = 1,000414757$

Άρα $\overline{S_{34}} = S_{34} * k = 4130,15$ m

3/ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΗΣ ΟΔΕΥΣΗΣ

Σημείο -2-

$\alpha_{12} = 65^g,33870 \qquad S_{12} = 21199,15$ m

Άρα: $x_2 = x_1 + S_{12} \cos\alpha_{12} \Rightarrow \boxed{231085,90 \text{ m} = x_2}$

$y_2 = y_1 + S_{12} \sin\alpha_{12} \Rightarrow \boxed{4412793,875 \text{ m} = y_2}$

Σημείο -3-

$\alpha_{23} = \alpha_{21} + \overline{\beta_{123}} = 26^g,2239397 \;, \; S_{23} = 25219,116$ m

$\boxed{x_3 = 241182,97 \text{ m}}$

$\boxed{y_3 = 4435903,46 \text{ m}}$

Σημείο -4-

$\alpha_{34} = \alpha_{32} + \overline{\beta_{234}} = 55^g,3703007 \;, \; S_{34} = 4130,15$ m

$\boxed{x_4 = 244339,11 \text{ m}}$ .108

$\boxed{y_4 = 4438567,47 \text{ m}}$ .469 ✓

Παρατηρούμε λοιπόν ότι αν στην οδευσή μας δεν κάνουμε τις παραπάνω διορθώσεις θα έχουμε τα παρακάτω σφάλματα:
Στις αποστάσεις των 20 ÷ 25 km ⟶ 12 m σφάλμα
" 4 km → 2 m "
ενώ δε συνολικά των σημείων διαφορές μέχρι και 20 m

4/ Μετατροπή των (x_4, y_4) της Ε.Μ.Π στις αντίστοιχες γεωδαιτικές (ΕΓΣΑ '87, ελλειψοειδές GRS '80)

$$\varphi = \varphi_0 + D_2 \cdot \Delta x^2 + D_4 \Delta x^4 + D_6 \cdot \Delta x^6$$
$$\lambda = \lambda_0 + E_1 \cdot \Delta x + E_3 \cdot \Delta x^3 + E_5 \Delta x^5$$

όπου D, E είναι συντελεστές που εξαρτώνται από το πλάτος και τις παραμέτρους του ελλειψοειδούς αναφοράς.

οπότε είναι:

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi_4 &= 40^\circ\ 3'\ 30'',966 \\ \lambda_4 &= 21^\circ\ 0'\ 9'',261 \end{aligned}}$$

5/ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΥ ΑΖΙΜΟΥΘΙΟΥ $(A_{12} = \alpha_{12} + \gamma_1 + \delta_{12})$

α. Υπολογισμός της δ_{12}

έστω: $\delta_{12} = 7^{cc},836\,(y_1 - y_2)(x_{1/3} - 0,5)$

$x_{1/3} = 0,219$ Mm

$\delta_{12} = 24^{cc},178 = 7'',834$

β. Υπολογισμός της σύγκλισης γ_1

Από την σχέση:

$\gamma = \sin\varphi \cdot \Delta\lambda + \sin\varphi \cdot \cos^2\varphi (1 + 3e'^2 \cdot \cos^2\varphi + 2e'^4 \cos^4\varphi) \frac{\Delta\lambda^3}{3} + \dots$ βρίσκω την σύγκλιση:

$$\gamma_1 = -2^\circ\ 8'\ 28'',734$$

γ. Υπολογισμός του A_{12}

$\alpha_{12} = 65^g,33870 = 58^\circ\ 48'\ 17'',39$ οπότε:

$A_{12} = \alpha_{12} + \gamma_1 + \delta_{12} = (58^\circ 48'\ 17'',39) - (2^\circ 8'\ 28'',734) + (0^\circ 0'\ 7'',834) \Rightarrow$

$\Rightarrow A_{12} = 56^\circ\ 39'\ 56'',49$

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑΣ

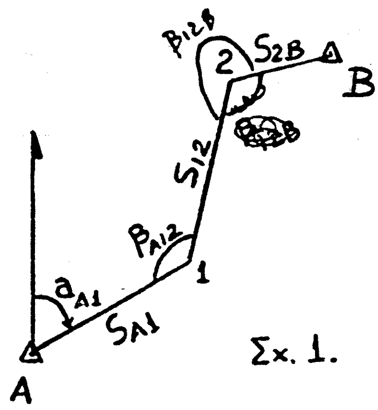
ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή (ΕΜΠ) που αναφέρεται στο ΕΓΣΑ 87 και χρησιμοποιεί το ελλειψοειδές GRS'80 (a=6 378 137, 1/f=298.2572221, e=.08181919104) έχει το βασικό πλεονέκτημα σε σχέση με τη προβολή Hatt ότι χρησιμοποιεί ένα κέντρο προβολής σε όλο τον Ελληνικό χώρο. Η χρήση πολλών κέντρων προβολής στην Hatt έχει σαν αποτέλεσμα οι παραμορφώσεις στην απεικόνιση της φ.γ.ε. να είναι αμελητέες (<5ppm) και κατά συνέπεια δεν χρειάζονται αναγωγές γωνιών και αποστάσεων στους υπολογισμούς πάνω στη προβολή. Πρέπει να γίνει σαφές ότι αντίθετα στην ΕΜΠ οι μετρήσεις που πραγματοποιούνται στο πεδίο πρέπει να υπόκεινται προηγούμενα σε κάποιες αναγωγές πριν να χρησιμοποιηθούν για υπολογισμούς πάνω στην προβολή.

Ενα παράδειγμα για τις απαιτούμενες αναγωγές των μετρουμένων μεγεθών προκειμένου να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση μιας όδευσης πάνω στην προβολή δίνεται στη συνέχεια. Είναι προφανές ότι οι ίδιες ακριβώς αναγωγές απαιτούνται για την επίλυση κάποιου δίκτυου ή οποιασδήποτε άλλης γεωδαιτικής εφαρμογής.

Το παράδειγμα είναι μιά ανοικτή όδευση με 4 κορυφές που δίνεται στο σχήμα (1). Στην όδευση αυτή είναι γνωστές οι συντεταγμένες του πρώτου σημείου (Α), η αρχική γωνία διεύθυνσης a_{A1}, καθώς και οι μετρήσεις των γωνιών β_{A12}, β_{12B} και των αποστάσεων S_{A1}, S_{12}, S_{2B}. Στις αποστάσεις έχουν προηγούμενα γίνει διορθώσεις για τη ταχύτητα διάδοσης του σήματος (ατμοσφαιρική διόρθωση), την κλίση και έχει γίνει αναγωγή στο Ελλειψοειδές Αναφοράς.



Σχ. 1.

Για τον έλεγχο του κλεισίματος της όδευσης δίνονται επιπλέον οι συντεταγμένες του σημείου (Β).

Για την αναγωγή των γωνιών που μετρούνται στο πεδίο (και ουσιαστικά ταυτίζονται με τη γωνία πάνω στο ελλειψοειδές αν θεωρηθούν αμελητέες η απόκλιση της κατακορύφου και η διαφορά της γεωδαισιακής γραμμής από την κάθετη τομή) στις αντίστοιχες γωνίες πάνω στην απεικόνιση ισχύει η σχέση:

$$\begin{aligned} \overline{\beta_{123}} &= \alpha_{23} - \alpha_{21} = A_{23} - \gamma_2 + \delta_{23} - A_{21} + \gamma_2 - \delta_{21} \\ &= (A_{23} - A_{21}) + (\delta_{23} - \delta_{21}) \\ &= \tilde{\beta}_{123} + (\delta_{23} - \delta_{21}) \end{aligned}$$

όπου $\tilde{\beta}_{123}$ είναι η γωνία που μετράται στο πεδίο.
και δ_{23}, δ_{21} είναι η αναγωγή της εφαπτόμενης της γεωδαισιακής γραμμής στη χορδή και δίνεται από την απλοποιημένη σχέση:

$$\delta_{12} = 7^{cc}.836\ (Y_1 - Y_2)(X_{1/3} - 0.5)$$

όπου Y_1, Y_2 οι τεταγμένες των σημείων εκφρασμένες σε Km και

$X_{1/3} = \dfrac{2X_1 + X_2}{3}$ εκφρασμένο σε Mm.

Οι πλευρές επίσης μετά την αναγωγή τους για τις ατμοσφαιρικές καθυστερήσεις, τη κλίση και την αναγωγή στο ελλειψοειδές μετατρέπονται σε μήκη πάνω στην προβολή προσδιορίζοντας την κλίμακα παραμόρφωσης των μηκών K.

$$K = \kappa\ 10^{-6} + 1$$

όπου $\kappa = 12\ 311(X - 0.5)^2 - 400$ (σε ppm)

Το X είναι εκφρασμένο σε Mm στην σχέση αυτή και για πεπερασμένα μήκη (<25 Km) μπορεί να προσδιοριστεί μιά ενιαία κλίμακα για το μήκος αν σαν X δοθεί $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$.

Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω αναγωγές ζητείται η επίλυση της όδευσης όταν δίνονται τα παρακάτω στοιχεία:

$X_A = 313\ 259.17m$ $Y_A = 4\ 356\ 006.55m$ $a_{A1} = 68^g.19450$

$S_{A1} = 22\ 166.25m$ $S_{12} = 25\ 187.12m$ $S_{2B} = 4.358.44m$

$\tilde{\beta}_{A12} = 166^g.50947$ $\tilde{\beta}_{12B} = 229^g.20041$

Για τον έλεγχο κλεισίματος της όδευσης τέλος δίνονται οι συντεταγμένες του σημείου (B) :

$X_B = 349\ 452.73m$ $Y_B = 4\ 390\ 499.79m$

Προσδιορίστε το γεωδαιτικό αζιμούθιο A_{A1} της διεύθυνσης A-1 από την γωνία διεύθυνσης a_{A1}.

$$A_{A1} = a_{A1} + \gamma_A - \delta_{A1}$$

$$\gamma_1 = \frac{(X-500000)}{N' k_o} \tan\varphi' - \frac{(X-500000)^3}{3N'^3 k_o^3} \tan\varphi' (1 + \tan^2\varphi' - e'^2 \cos^2\varphi')$$

Οπου το φ' προσδιορίζεται με διαδοχικές προσεγγίσεις απο τη σχέση που δίνει το τόξο μεσημβρινού:

$$M_o^{\Phi}{}' = M_o \varphi' - 2M_2 \sin\varphi' \cos\varphi' + 2M_4 \sin2\varphi' \cos2\varphi' - 2M_6 \sin3\varphi' \cos3\varphi'$$

και $N' = \dfrac{a}{(1-e^2 \sin^2\varphi')^{1/2}}$, $e' = \dfrac{e}{(1-e^2)^{1/2}}$

Παράδοση:

ΓΒ/ΒΜ/ΧΛ: 14/11/89

39° 20′	21° 50′	39°.33333333	21°.83333333
39° 25′ 58″.6107	22° 03′ 22″.6803	39°.43294741	22°.05630008
39° 37′ 45″.5534	22° 12′ 10″.7495	39°.62932039	22°.20298598
39° 39′ 03″.7846	22° 14′ 42″.9728	39°.65105127	22°.24527022

$\alpha_{A1} = 60°$

$S_{A1} = 22\ 166.251$

$S_{12} = 25\ 187.123$

2 $S_{2B} = 4\ 358.435$

3

$\beta_{\widehat{A12}} = 149°.8585268$
$= 166^g.5094742$

$\beta_{\widehat{12B}} = 206°.2803670$
$= 229^g.2004078$

$a = 6378137$

$1/f = 298.2572221$

$e = 0.08181919104$

Άσκηση 6η

$\alpha = A - \gamma + \delta$

$\beta_{\widehat{A12}} = \alpha_{12} - \alpha_{1A} = A_{12} - \cancel{\gamma_1} + \delta_{12} - A_{1A} + \cancel{\gamma_1} - \delta_{1A}$

$= A_{12} - A_{1A} + (\delta_{12} - \delta_{1A})$

$= \beta_{\widehat{A12}} + (\delta_{12} - \delta_{1A})$

$\delta_{12} = 7^{cc}.836\ (y_1 - y_2)\ (x - x_0)$ km, Mm

$\hookrightarrow x = \frac{2x_1 + x_2}{3}$

$S_{12} = k_{12}\ \bar{S}_{12}$ όπου $k_{12} = k_0 + 0.012311\ (x - x_0)^2$

$\hookrightarrow x = \frac{x_1 + x_2}{2}$

x και x_0 σε Mm

TRANSVERSE M.P

α/α	X	Y	
A	313 259.17 313 259.169	4356 006.55 4 356 006.552	$da = -2.397553377 \cdot 10^{-2}$ $k = 1.0000292608$
1	332 715.87 332 715.869	4 366 625.68 4 366 625.684	$da = -2.15526368829 \cdot 10^{-2}$ $k = 0.99994447699955$
2	345 776.45 345 776.454	4 388 159.581 4 388 159.581	$da = -2.00083482390 \cdot 10^{-2}$ $k = 0.999892781406$
B	349 452.73 349 452.734	4 390 499.791 4 390 499.791	$da = -1.9546311499 \cdot 10^{-2}$ $k = 0.99987898999$

Ασκηση 6η Αποτελέσματα

$$\beta_{\overline{A12}} = \beta_{\widehat{A12}} + (\delta_{12} - \delta_{1A})$$

$$= 166^g.5094742 + 7.83\cancel{3}^{6} \cdot 10^{-4} (4{,}366{,}625684 - 4{,}388{,}159581)\left(\overset{0.33706940}{0.339246162} - 0.5\right)$$

$$- 7.83\cancel{3}^{6} \cdot 10^{-4} (4\,366{,}625684 - 4356.006552)\left(\overset{0.32623030}{0.322987519} - 0.5\right)$$

$$= 166^g.5094742 + 0^g.0027\cancel{115}^{493} + 0.0014\cancel{72384}^{460}$$

$$= 166^g.5136\cancel{808}^{695}$$

$$\beta_{\overline{12B}} = \beta_{\widehat{12B}} + (\delta_{2B} - \delta_{21})$$

$$= 229^g.2004078 + 7.83\cancel{3}^{6} \cdot 10^{-4} (4388.159581 - 4390.499791)\left(\overset{0.34700188}{0.347614594} - 0.5\right)$$

$$- 7.83\cancel{3}^{6} \cdot 10^{-4} (4\,388.159581 - 4366.625684)\left(\overset{0.341422923}{0.339246162} - 0.5\right)$$

$$= 229^g.2004078 + 0.000\cancel{279338}^{2806} + 0.00\cancel{271516}^{26758}$$

$$= 229^g.2033\cancel{98654}^{642}$$

$$A_{A1} = 60^\circ = 66^g.66666667$$

$$\alpha_{A1} = A - \gamma + \delta$$

$$\gamma = -1^g.526329880 = -1^\circ.3736969 = -1^\circ 22' 25''.31$$

$$\delta = 7^g.83\cancel{3}^{6} \cdot 10^{-4} (4356.006552 - 4366.625684)\left(\overset{0.31974474}{0.322987519} - 0.5\right)$$

$$\delta = 0^g.00147\cancel{230}^{999}$$

$$\alpha_{A1} = 68^g.1944\cancel{6893}^{964}$$

$$k_{A1} = 0.9996 + 0.012311 \frac{(\overset{\mu_m}{X} - \overset{M_m}{X_0})^2}{(0.322987519 - 0.5)^2} = 0.999985746$$

$$k_{12} = 0.9996 + 0.012311 (0.339246162 - 0.5)^2 = 0.99991838$$

$$k_{2B} = 0.9996 + 0.012311 (0.347614594 - 0.5)^2 = 0.99988587\mathrm{8}$$

↳ ⊛ Ο τύπος αυτός ταυτίζεται με αυτόν της άσκησης!

$$S_{A1} = S_{A1} \cdot k_{A1} = 22\,166.251 \cdot 0.999985746 = 22165.935$$

$$S_{12} = S_{12} \cdot k_{12} = 25\,187.123 \cdot 0.99991S128 = 25\,185.061$$

$$S_{2B} = S_{2B} \cdot k_{2B} = 4\,358.435 \cdot 0.999885878 = 4\,357.938$$

Αν. Επίλυση

	x	y	
A	313 259.17	4 356 006.55	$S_{A1} = 22165.94$ $\quad a_{A1} = 68^g.19447$
1	332 715.86	4 366 625.69	$S_{12} = 25185.06$
			$a_{12} = \beta_{\overline{A12}} + a_{A1} - 200^g \Rightarrow a_{12} = 34^g.70815$
2	345 776.44	4 388 159.58	$S_{2B} = 4\,357.94$
			$a_{2B} = \beta_{\overline{12B}} + a_{12} - 200^g = \quad a_{2B} = 63^g.91155$
B	349 452.72	4 390 499.79	

ΣΩΣΤΑ

A	313 259.~~169~~ 17	4 356 006.558	$S_{A1} = 22165.935$
			$a_{A1} = 68^g.194496$
1	332 715.86	4 366 625.68	$S_{12} = 25\,185.061$
2	345 776.44	4 388 159.57	$a_{12} = 34^g.708166$
B	349 452.72	4 390 499.78	$S_{2B} = 4\,357.938$
			$a_{2B} = 63^g.911530$

Οι περισσότερες εφαρμογές στις τοπικές γεωδαιτικές εργασίες αναφέρονται πάντα σε κάποιο σύστημα απεικόνισης

Επιτρέπεται σε αυτές είναι η πλήρης κατανόηση των απαιτούμενων αναγωγών και διορθώσεων που απαιτούνται έτσι ώστε οι μετρήσεις που πραγματοποιούνται στο έδαφος να αναχθούν στην απεικόνιση οριζοντιογραφικά μεγέθη.

Για μεγάλες αποστάσεις όπως είναι γνωστό τα μεγέθη που μετρούνται στο πεδίο πρέπει να αναχθούν στο Ελλειψοειδές σε περίπτωση:

Εδώ οι γωνίες ανάγονται στο ελλειψοειδές εφαρμόζοντας

1) τη διόρθωση ε λόγω σφαιρικού σκοπευσης $\varepsilon = (\infty) \frac{h_2}{S}$

2) τη διόρθωση λόγω διπλής καμπύλου τομής - γεωδαισιακής γραμμής

3) Η απόκλιση της κατακορύφου αποτελεί σε κάθε στη μέτρηση δύο διευθύνσεων για τον προσδιορισμό της γωνίας.

Αντίστοιχα για τις αποστάσεις ~~εφαρμόζονται~~ που προκύπτουν από μετρήσεις που έχει γίνει με EDM απαιτούνται διάφορες αναγωγές και διορθώσεις που συνοπτικά είναι

1) Διόρθωση λόγω ατμοσφαιρικής καθυστέρησης
2) Διόρθωση για την καμπύλωση της γραμμής από διάθλαση
3) Διόρθωση για την κλίση Δκεκ
4) Αναγωγή στη στάθμη της θαλάσσης Δθαλ.
5) Αναγωγή στο ελλειψοειδές Δελλ.

Μ. όλες τις παραπάνω διορθώσεις αναφέρθηκε ότι αναφέρονται στις γωνίες

Στις καθημερινές εργασίες οι αναγωγές για τις γωνίες ... ~~είναι~~ αμελητέες

Στις μελέτες απαιτούνται οι αναγωγές (1) (3) ~~για ... και ...~~

... ~~...~~ ... ...

η γωνίες και οι αποστάσεις μπορούν να χρησιμοποιηθούν

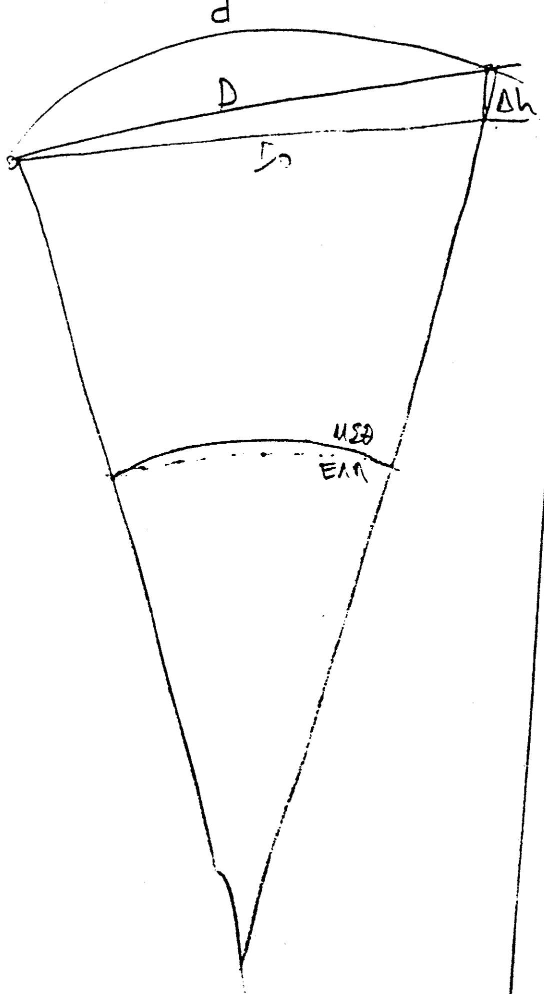
[illegible] στη Hatt για οποιαδήποτε γεωδαιτική εργασία

τι ΕΜΠ ΦΣ2000 απαιτούνται προηγούμενα κάποιες αναγωγές

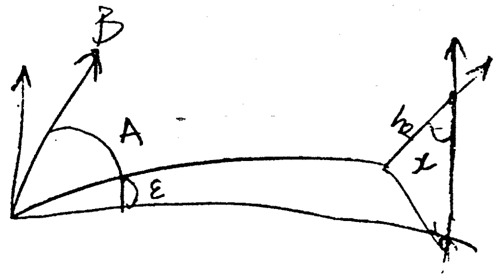
για τις αποστάσεις και τις γωνίες

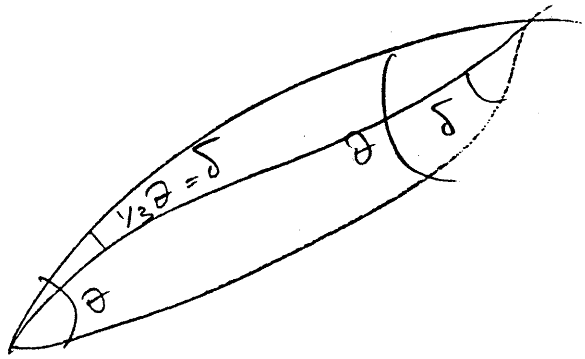
2η σειρά ασκήσεων

Αποστάσεις



Γωνίες





ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ
ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΓΡΙΒΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ
9ο εξάμ.

ΑΣΚΗΣΗ 1

1. Προκειμενου να υπολογιστει η θεση ενος αγνωστου σημειου απο ενα γνωστο μετραμε την αποσταση και το αζιμουθιο.

Αν η θεση του αγνωστου σημειου θελουμε να προσδιοριστει με ακριβεια 1 m , 10cm 1 cm , 1 mm αντιστοιχα δωστε την ακριβεια με την οποια πρεπει να μετρηθει το αζιμουθιο (εκφρασμενη σε rad και arcsec) και η αποσταση (εκφρασμενη σε ppm) για σημεια που απεχουν 1, 10 , ~~20~~ , 50 , 100 , 200 km μεταξυ τους.

Συγκρινατε την σχεση των rad και ppm.

2. Προσδιοριστε το μηκος τοξου 1 arcsec σε μετρα κατα μεσημβρινο και παραλληλο για γεωδαιτικα πλατη 35° , 38° , 41° στο συστημα αναφορας GRS 80 , Επαναλαβετε την διαδικασια , για τα ιδια πλατη, χρησιμοποιωντας την μεση ακτινα καμπυλοτητας.

Δινονται :

$a = 6\ 378\ 137$ m

$1/f = 298.257222101$

$e^2 = 0.006694380023$

$$\rho = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{3/2}}$$

$$N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{1/2}}$$

$R_G^2 = \rho N \qquad r = N\cdot\cos\varphi$

φ 34°45' ÷ 41°45

Εαν θελουμε να χρησιμοποιησουμε , για απλουστευση , μια και μον ενιαια, για ολη την Ελλαδα , τιμη για το μηκος τοξου 1 arcsec στο μεσημβρινο και παραλληλο , ποια πρεπει να ειναι αυτη η τιμη και γι ποσης ακριβειας υπολογισμους μπορει να χρησιμοποιηθει .

Δεδομενου οτι η μεταβολη του μηκους τοξου 1 arcsec στον παραλληλ ειναι μεγαλη για την εκταση της χωρας τι μπορει να γινει ωστε ν βελτιωθει η ακριβεια της χρησιμοποιουμενης τιμης.

3. Η σχεση που προσδιοριζει το μηκος τοξου στο μεσημβρινο, απο το ισημερινο μεχρι πλατους φ , ειναι η επομενη :

$$M = \alpha(1-e^2)\ (M_0\varphi - M_2\sin2\varphi + M_4\sin4\varphi - M_6\sin6\varphi + M_8\sin8\varphi - \ldots)$$

οπου :

$$M_0 = 1 + 3/4\ e^2 + 45/64\ e^4 + 175/256\ e^6 + 11025/16384\ e^8 + \ldots$$

$$M_2 = 3/8\ e^2 + 15/32\ e^4 + 525/1024\ e^6 + 2205/4096\ e^8 + \ldots$$

$$M_4 = 15/256\ e^4 + 105/1024\ e^6 + 2205/8820\ e^8 + \ldots$$

$$M_6 = 35/3072\ e^6 + 315/12288\ e^8 + \ldots$$

$$M_8 = 315/130784\ e^8 + \ldots$$

α. Να υπολογιστεί η σχέση (1) για το GRS-80 ...

α. Δωστε την ταξη μεγεθους του κάθε ορου της μορφης $a_i e^{2i}$ για το υπολογισμο των M_i οπου i=0,2,4,6,8 .

β. Ποιους ορους M_i , της σειρας που δινει το M , πρεπει να χρησιμοποιησουμε και μεχρι ποια δυναμη του e στον καθε ορο ωστε η ακριβεια προσδιορισμου του τοξου μεσημβρινου μεχρι πλατος φ=42 (το μεγιστο για τον ελληνικο χωρο) , να ειναι αντιστοιχα 20m , 0.05m , 0.001m. (0.01)

Παραδοση : 02/11/89

ΓΒ/ΧΛ/ΒΜ 16/10/89

κίνησης αφερματικής $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_0 = 1\,m$.

1. Αν η θέση του (A) άγνωστου σημείου πρέπει να προσδιοριστεί με ακρίβεια $\sigma_0 = 1m, 1cm, 1mm$ τότε για σημεία που απέχουν $S = 10, 20, 50, 100$ Km μεταξύ τους

τότε το αζιμούθιο πρέπει να μετρηθεί με ακρίβεια

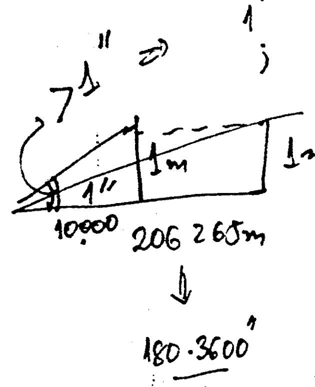
$$\sigma_a = \arcsin \frac{\sigma_0 (m)}{S (m)} \ [rad]$$ μικρά λόγια $\arcsin(rad) = \frac{\sigma_0}{S}$.

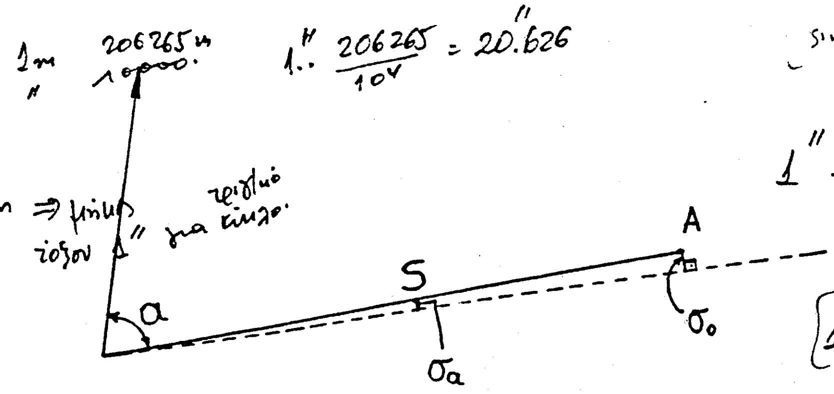
ενώ η απόσταση πρέπει να μετρηθεί με ακρίβεια

$$\sigma_S = \frac{\sigma_0 \times 10^6}{S} \quad [ppm]$$ αναλογικό σφάλμα απόστασης

$1'' = arc\ 1sec = \frac{1}{206265}$

Επίσης ισχύει $\sigma_a [arcsec] = \sigma_a [rad] \times 206264.8063$





$1'' = \frac{1}{206265} = 4.85 \cdot 10^{-6} \sim 5 \cdot 10^{-6}\ rad$

$[1 \mu rad] = 10^{-6} \to 0,2''$

Τα αποτελέσματα σε κάθε περίπτωση φαίνονται στον πιο κάτω πίνακα:

Απόσταση S	10 Km			20 Km			50 Km			100 Km		
ακρίβεια σ_0	1m	1cm	1mm	1m	1cm	1mm	1m	1cm	1mm	1m	1cm	1mm
σ_a [rad]	10^{-4}	10^{-6}	10^{-7}	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-7}$	$5 \cdot 10^{-8}$	$2 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-7}$	$2 \cdot 10^{-8}$	10^{-5}	10^{-7}	10^{-8}
σ_s [ppm]	10^2	1	10^{-1}	$5 \cdot 10$	$5 \cdot 10^{-1}$	$5 \cdot 10^{-2}$	$2 \cdot 10$	$2 \cdot 10^{-1}$	$2 \cdot 10^{-2}$	10	10^{-1}	10^{-2}
σ_a [arcsec]	20,626	0.206	0,021	10,103	0.103	0,010	4,125	0,041	0.004	2,063	0,021	0,00[illegible]

$\sigma_a = 10^{-4} \times 10^6 = \sigma_a (ppm) \equiv \sigma_s$ ppm

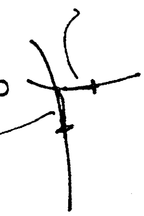
Παρατηρούμε ότι η ακρίβεια σ_a σε rad προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε την ακρίβεια σ_s σε ppm με το 10^{-6}.

$$\sigma_a (rad) \times 10^6 = \sigma_s (ppm)$$

2. Από τους τύπους που δίνονται (μαζί και με τον $r = N \cdot \cos\varphi$) βρίσκουμε τις τιμές των ακτίνων ρ, N, r, R_G για τα γεωδαιτικά πλάτη 35°, 38°, 41°. Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

φ	ρ(m)	N(m)	r(m)	R_G(m)
35°	6356427	6385172	5230427	6370783
38°	6359630	6386244	5032429	6372923
41°	6362920	6387346	4820591	6375121

$d\pi_{1''} = rc$



Το μήκος τόξου 1arcsec σε μέτρα στον μεσημβρινό δίνεται από τη σχέση $dS_m = d_\mu 1 = \rho d\varphi \sim 1''$.

$d\mu_{1''} = \rho d\varphi_{1''}$

όπου dφ η γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο 1arcsec στον μεσημβρινό.

Όμοια το μήκος τόξου 1arcsec στον παράλληλο δίνεται από τη σχέση:

$$dS_\varphi = d_\pi 1 = r d\varepsilon \sim 1'' = N\cos\varphi \, d\lambda.$$

όπου dε η γωνία που αντιστοιχεί σε τόξο 1arcsec στον παράλληλο.

Αν χρησιμοποιήσουμε τη μέση ακτίνα καμπυλότητας τότε θα έχουμε:

$$d'_\mu = R_G \cdot d\varphi \qquad R_G \sim \rho$$

$$d'_\pi = R_G \cos\varphi d\varepsilon, \text{ θέτοντας } \underline{N = R_G} \text{ στον τύπο } r = N\cos\varphi.$$

Επίσης ισχύει $d\varepsilon = d\varphi = \dfrac{1}{206264,8063}$ rad $\quad 1''$

$$d_\mu = \rho \, d\varphi \rightarrow 1''$$

$$d_\mu(m) = \rho \cdot \frac{1''}{180 \cdot 3600''} \pi.$$

Τα αποτελέσματα φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

φ	$d_\mu 1$ dS_m	$d_\pi 1$ dS_p	$d'_\mu 1$ dS'_m	$d'_\pi 1$ dS'_p
35°	30.817	25.358	30.886	25.300
38°	30.832	24.398	30.897	24.347
41°	30.848	23.371	30.907	23.325

Αν πάρουμε υπ' όψην μας ότι η Ελλάδα εκτείνεται από πλάτος $\varphi = 34^\circ 45'$ έως $\varphi = 41^\circ 45$ τότε για ολόκληρη τη χώρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον μέσο όρο των παραπάνω τιμών.

Έτσι θα έχουμε:

Μήκος τόξου 1arcsec στον μεσημβινό $= \overline{d_\mu 1} \underset{=}{\overset{dS_m}{}} 30.832$

Μήκος τόξου 1arcsec στον παράλληλο $= \overline{d_\pi 1} \underset{=}{\overset{dS_p}{}} 24.376$ ✓

Μήκος τόξου 1arcsec στον μεσημβρινό με τη μέση ακτίνα καμπυλότητος=

$dS'_m = \overline{d'_\mu 1} = 30.897$ ✓ R_G

Μήκος τόξου 1arcsec στον παράλληλο με τη μέση ακτίνα καμπυλότητας =

$dS'_p = \overline{d'_\pi 1} = 24.324$ ✓

Αν παρατηρήσουμε τις τιμές των $\overline{d_\mu 1}$ και $\overline{d'_\mu 1}$ θα δούμε ότι διαφέρουν από τις $d_\mu 1$ και $d'_\mu 1$ για τα διάφορα πλάτη φ ±2 cm περίπου. Αυτή είναι και η ακρίβεια των υπολογισμών με τη χρήση των $\overline{d_\mu 1}$ ή και $\overline{d'_\mu 1}$. (Και αυτό στη χειρότερη περίπτωση). ✓

Όσο αναφορά τις τιμές των $\overline{d_\pi 1}$ και $\overline{d'_\pi 1}$ αυτές διαφέρουν μέχρι ±1m περίπου από τις τιμές των $d_\pi 1$ και $d'_\pi 1$ για τα διάφορα πλάτη φ. Επειδή η μεταβολή τους είναι γραμμική μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των $\overline{d_\pi 1}$ και $\overline{d'_\pi 1}$ για όλη την Ελλάδα με ακρίβεια στους υπολογισμούς ±1m. ✓

3. a) Οι τάξεις μεγέθους φαίνονται παρακάτω:

$$M_0 = 1 + 5{,}02 \cdot 10^{-3} + 3{,}15 \cdot 10^{-5} + 2{,}05 \cdot 10^{-7} + 1{,}34 \cdot 10^{-9}$$

$$M_2 = 2{,}51 \cdot 10^{-3} + 2{,}10 \cdot 10^{-5} + 1{,}53 \times 10^{-7} + 1{,}08 \cdot 10^{-9}$$

$$M_4 = 2{,}63 \cdot 10^{-6} + 3{,}08 \cdot 10^{-8} + 5{,}02 \cdot 10^{-10}$$

$$M_6 = 3{,}42 \cdot 10^{-9} + 5{,}15 \cdot 10^{-11}$$

$$M_8 = 4{,}84 \cdot 10^{-12}$$

β). Κάθε συντελεστής των M_i πολλαπλασιάζεται με $a(1-e^2)$ κ.ο.κ. και με μια σχέση που είναι συνάρτηση της γωνίας φ.

Έτσι έχουμε

κάθε όρος του M_0 πολλαπλασιάζεται με $a(1-e^2)\varphi$

——//—— M_2 ——//—— $a(1-e^2)\sin 2\varphi$

——//—— M_4 ——//—— $a(1-e^2)\sin 4\varphi$

——//—— M_6 ——//—— $a(1-e^2)\sin 6\varphi$

——//—— M_8 ——//—— $a(1-e^2)\sin 8\varphi$

Πολλαπλασιάζοντας τον κάθε όρο των M_i με τις αντίστοιχες παραπάνω ποσότητες βρίσκω την συνεισφορά του κάθε όρου για κάθε M_i στην τελική τιμή του M (σε μέτρα):

$M_0 = 4644119{,}584 + 23317{,}126 + 146{,}338 + 0{,}952 + 0{,}006$

$M_2 = 15817{,}313 + 132{,}359 + 0{,}969 + 0{,}007$

$M_4 = 3{,}459 + 0{,}041 + 0{,}001$

$M_6 = -0{,}021 - 0{,}000$

$M_8 = -0{,}000$

Μετά από αυτούς τους υπολογισμούς μπορούμε να πούμε ότι για να πετύχουμε ακρίβεια:

20 m χρησιμοποιούμε τους 3 πρώτους όρους του M_0 και
τους 2 πρώτους όρους του M_2

0.05m —//— τους 4 πρώτους όρους του M_0
τους 3 πρώτους όρους του M_2 και
τον 1º όρο του M_4, και τον 2º

0,001m —//— τους 5 πρώτους όρους του M_0
τους ~~4~~ πρώτους όρους του M_2
τους 3 πρώτους όρους του M_4
τον 1º όρο του M_6

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑΣ
ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

ΓΡΙΒΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ.
9ο εξάμηνο

ΑΣΚΗΣΗ 5

Το γεωδαιτικο συστημα αναφορας που προκειται να χρησιμοποιηθει για ολες τις γεωδαιτικες εργασιες στον ελληνικο χωρο τα επομενα χρονια ειναι το ΕΓΣΑ 87.

Το συστημα απεικονισης (προβολη) που χρησιμοποιει το ΕΓΣΑ 87 ειναι η Εγκαρσια Μερκατορικη Προβολη (Ε.Μ.Π.) με κεντρικο μεσημβρινο $\lambda_o=24°$ και κλιμακα σε αυτον $K_o=0.999600$. Οι τιμες αυτες επιλεχτηκαν ετσι ωστε αφ' ενος μεν να ελαχιστοποιουν τις παραμορφωσεις στην εκταση της ηπειρωτικης χωρας και αφ' ετερου να εχουμε ακεραιο μεσημβρινο σαν κεντρικο μεσημβρινο της προβολης και μια τιμη κλιμακας που χρησιμοποιειται ευρυτατα στις εφαρμογες της Ε.Μ.Π.

Πλεονεκτημα της Ε.Μ.Π. ειναι η ενιαια αντιμετωπιση του συστηματος απεικονισης για ολον τον ελληνικο χωρο σε αντιθεση με την προβολη ΗΑΤΤ. Σχετικο μειονεκτημα της Ε.Μ.Π. ειναι η αναγκη να γινονται αναγωγες στις μετρησεις κατι που στην προβολη ΗΑΤΤ (σε φυλλα 30' Χ 30') δεν γινοταν επειδη αυτες ηταν αμελητεες.

Μετατροπη ελλειψοειδων γεωδαιτικων συντεταγμενων (φ,λ) σε επιπεδες καρτεσιανες συντεταγμενες Ε.Μ.Π. (x,y)

$$x = x_o + K_o N\cos\varphi\Delta\lambda + K_o(N/6)\cos^3\varphi(1-\tan^2\varphi + e'^2\cos^2\varphi)\Delta\lambda^3 + ((K_o N\cos^5\varphi)/120)\ (5-18\tan^2\varphi+\tan^4\varphi+14e'^2\cos^2\varphi-58e'^2\sin^2\varphi)\Delta\lambda^5$$

$$y = K_o M + K_o(N/2)\cos\varphi\sin\varphi\Delta\lambda^2 + K_o(N/24)\sin\varphi\cos^3\varphi(5-\tan^2\varphi+9e'^2\cos^2\varphi)\Delta\lambda^4 + K_o(N/720)\sin\varphi\cos^5\varphi(61-58\tan^2\varphi+\tan^4\varphi)\Delta\lambda^6$$

οπου

K_o = συντελεστης κλιμακας στον κεντρικο μεσημβρινο = 0.999600
M = μηκος τοξου μεσημβρινου απο $\varphi_o=0°$ εως φ
x_o = συμβατικη τετμημενη κεντρικου μεσημβρινου = 500 000 m
(για να μην υπαρχουν αρνητικες τιμες στις τετμημενες)

Μετατροπη επιπεδων καρτεσιανων συντεταγμενων Ε.Μ.Π. (x,y) σε ελλειψοειδεις γεωδαιτικες συντεταγμενες (φ,λ).

$$\varphi = \varphi' - \frac{\tan\varphi'}{2K_o^2N'\rho'}x^2 + \frac{\tan\varphi'(5+3\tan^2\varphi'+e'^2\cos^2\varphi'-4e'^4\cos^4\varphi'-9e'^2\sin^2\varphi')}{24K_o^4N'^3\rho'} x^4$$

$$- \frac{\tan\varphi'(61+90\tan^2\varphi'+46e'^2\cos^2\varphi'+45\tan^4\varphi'-252e'^2\sin^2\varphi')}{720N'^5\rho'K_o^6} x^6$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_o = \frac{x}{N'\cos\varphi' K_o} - \frac{(1+2\tan^2\varphi'+e'^2\cos^2\varphi')}{6N'^3\cos\varphi' K_o^3} x^3$$

$$+ \frac{(5+28\tan^2\varphi'+24\tan^4\varphi'+6e'^2\cos^2\varphi'+8e'^2\sin^2\varphi')}{120N'^5\cos\varphi' K_o^5} x^5$$

οπου

φ' = πλατος ποδος της καθετου απο το σημειο προς τον κεντρικο μεσημβρινο συνεπως το πλατος που αντιστοιχει σε τοξο μεσημβρινου ισο με y/K_o

$x = x - x_o$ = με x την τετμημενη του σημειου στην Ε.Μ.Π. και x_o την συμβατικη τετμημενη του κεντρικου μεσημβρινου .

Δεδομενου οτι στον ελληνικο χωρο τα επομενα χρονια θα συνυπαρχουν τα δυο συστηματα αναφορας (GD και ΕΓΣΑ 87) με δυο διαφορετικα συστηματα απεικονισης (HATT και Ε.Μ.Π.) θα ειναι αναγκαια η μετατροπη συντεταγμενων απο το ενα συστημα στο αλλο.

Σημειώνεται οτι

Οι επιπεδες καρτεσιανες συντεταγμενες στην προβολη ΗΑΤΤ αναφερονται στο παλαιο ελληνικο συστημα αναφορας (GD) που χρησιμοποιει το ελλειψοειδες του Bessel ($a=6377397.155$ και $1/f=299.153$)

Οι επιπεδες καρτεσιανες συντεταγμενες στην Ε.Μ.Π. αναφερονται στο συστημα ΕΓΣΑ 87 που χρησιμοποιει το ελλειψοειδες GRS 80 ($a=6378137$ και $1/f=298.257222101$)

Η εκκεντροτητα των δυο συστηματων αναφορας δινεται απο τις :

$$X_{GD} = X_{\text{ΕΓΣΑ } 87} + \Delta X \qquad \Delta X = -655.22$$
$$Y_{GD} = Y_{\text{ΕΓΣΑ } 87} + \Delta Y \qquad \Delta Y = -299.35$$
$$Z_{GD} = Z_{\text{ΕΓΣΑ } 87} + \Delta Z \qquad \Delta Z = -252.09$$

Υπολογιστε τις επιπεδες καρτεσιανες συντεταγμενες στην Ε.Μ.Π. των σημειων 1 και 2 της ασκησης 4.

) Υπολογιστε τη γωνια διευθυνσης a_{12} και την αποσταση s_{12} στην Ε.Μ.Π. αναμεσα στα σημεια 1 και 2.

γ) Υπολογιστε τις παραμορφωσεις που εισαγει η Ε.Μ.Π. στη γωνια διευθυνσης και την αποσταση και συγκρινετε αυτες με τις αντιστοιχες της προβολης ΗΑΤΤ.

ΠΑΡΑΔΟΣΗ : 14/12/89
ΕΒ/ΧΛ/ΒΜ : 27/11/89

Από την άσκηση 4 έχουμε τις ελλειψοειδής συντεταγμένες των δύο σημείων:

$1\,(\Phi_1, \Lambda_1) = (38^\circ\ 25'\ 55'',9175 \quad 23^\circ\ 31'\ 50'',2781)$.

$2\,(\Phi_2, \Lambda_2) = (38^\circ\ 12'\ 10'',4127 \quad 24^\circ\ 8'\ 20'',5012)$.

α) Μετατρέπουμε τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες των δύο σημείων σε καρτεσιανές. Οι μετατροπές γίνονται με τους τύπους (για το παλαιό ελληνικό σύστημα αναφοράς GD):

$$X_{GD} = (N+h)\cos\Phi\cdot\cos\Lambda$$
$$y_{GD} = (N+h)\cos\Phi\cdot\sin\Lambda$$
$$Z_{GD} = [N(1-e^2)+h]\cdot\sin\Phi$$

[Θεωρούμε τα σημεία βρίσκονται πάνω στο ελλειψοειδές, άρα $h=0$]

Στο GD έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} a = 6377397,155\ m \\ \frac{1}{f} = 299,155 \Rightarrow e^2 = 2f - f^2 = 0,006674368 \end{array}\right\} \Rightarrow N = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\Phi)^{1/2}} \begin{cases} \text{για } \Phi_1: N_1 = 6385636,069\ m \\ \text{για } \Phi_2: N_2 = 6385552,880\ m \end{cases}$$

Έτσι έχουμε:

<u>για το σημείο 1</u>:

$$X_{GD1} = N_1\cos\Phi_1\cdot\cos\Lambda_1 \Rightarrow X_{GD1} = 4586206,237\ m.$$
$$Y_{GD1} = N_1\cos\Phi_1\cdot\sin\Lambda_1 \Rightarrow Y_{GD1} = 1997055,465\ m$$
$$Z_{GD1} = N_1(1-e^2)\cdot\sin\Phi_1 \Rightarrow Z_{GD1} = 3942743,289\ m$$

<u>για το σημείο 2</u>:

$$X_{GD2} = N_2\cdot\cos\Phi_2\cdot\cos\Lambda_2 \Rightarrow X_{GD2} = 4579142,513\ m.$$
$$Y_{GD2} = N_2\cdot\cos\Phi_2\cdot\sin\Lambda_2 \Rightarrow Y_{GD2} = 2052093,881\ m$$
$$Z_{GD2} = N_2(1-e^2)\cdot\sin\Phi_2 \Rightarrow Z_{GD2} = 3922774,865\ m$$

Μεταφέρουμε αυτές τις συντεταγμένες στο σύστημα ΕΓΣΑ 87 (στην Ε.Μ.Τ

<u>για το σημείο 1</u>:

$$X_{ΕΓΣΑ87\,1} = X_{GD1} - (-655,22) \Rightarrow X_{ΕΓΣΑ87\,1} = 4586861,457\ m$$
$$Y_{ΕΓΣΑ87\,1} = Y_{GD1} - (-299,35) \Rightarrow Y_{ΕΓΣΑ87\,1} = 1997354,814\ m$$
$$Z_{ΕΓΣΑ87\,1} = Y_{GD1} - (-252,09) \Rightarrow Z_{ΕΓΣΑ87\,1} = 3942995,379\ m$$

για το σημείο 2: $X_{ΕΓΣΑ87^2} = X_{GD^2} - (-655,22) \Rightarrow X_{ΕΓΣΑ87^2} = 4579797,735\, m.$

$Y_{ΕΓΣΑ87^2} = Y_{GD^2} - (-299,35) \Rightarrow Y_{ΕΓΣΑ87^2} = 2052393,234\, m$ ✓

$Z_{ΕΓΣΑ87^2} = Z_{GD^2} - (-252,09) \Rightarrow Z_{ΕΓΣΑ87^2} = 3923026,755\, m$

Μετατρέπουμε τις καρτεσιανές συντεταγμένες που βρήκαμε σε ελλειψοειδείς, στο σύστημα ΕΓΣΑ 87 που χρησιμοποιεί το GRS80. Η μετατροπή γίνεται με τους τύπους:

$$\tan\lambda = \frac{Y_{ΕΓΣΑ87}}{X_{ΕΓΣΑ87}}$$

$$\tan\varphi = \frac{Z_{ΕΓΣΑ87} + e^2 N \cdot \sin\bar{\varphi}}{\left[(X_{ΕΓΣΑ87})^2 + (Y_{ΕΓΣΑ87})^2\right]^{1/2}} = \frac{Z_{ΕΓΣΑ87} + e^2 \frac{a}{(1-e^2\sin^2\bar{\varphi})^{1/2}} \sin\bar{\varphi}}{\left[(X_{ΕΓΣΑ87})^2 + (Y_{ΕΓΣΑ87})^2\right]^{1/2}}$$

Για το GRS80 έχω:

$a = 6378137\, m.$

$1/f = 298,257222101 \Rightarrow e^2 = 2f - f^2 = 0,00669438$

Για το σημείο 1:

$\tan\lambda_1 = 0,435451306 \Rightarrow \lambda_1 = 23°\, 31'\, 50'',8086$

Το φ_1 θα το βρούμε κάνοντας διαδοχικές προσεγγίσεις ξεκινώντας από μια τιμή του $\bar{\varphi}_1$. Έστω $\bar{\varphi}_1 = 38°$.

Άρα

$$\tan\varphi_1' = \frac{Z_{ΕΓΣΑ87^1} + e^2 \frac{a}{(1-e^2\sin^2\bar{\varphi}_1)^{1/2}} \cdot \sin\bar{\varphi}_1}{\left[(X_{ΕΓΣΑ87^1})^2 + (Y_{ΕΓΣΑ87^1})^2\right]^{1/2}} \Rightarrow \varphi_1' = 38°\, 25'\, 43'',4988$$

Θέτω αυτή την τιμή της φ_1' στον ίδιο τύπο στη θέση της $\bar{\varphi}_1$:

$\tan\varphi_1'' = 0,793457923 \Rightarrow \varphi_1'' = 38°\, 25'\, 49'',8749$

Επαναλαμβάνοντας έχω:

$\tan\varphi_1''' = 0,79345813 \Rightarrow \varphi_1''' = 38° 25' 49'',9011$.

και $\tan\varphi^{(4)} = 0,793458131 \Rightarrow \varphi^{(4)} = 38° 25' 49'',9013$.

Επειδή η διαφορά $\varphi^{(4)} - \varphi_1'''$ είναι αμελητέα δεχόμαστε ότι:

$$\varphi_1 = \varphi^{(4)} = 38° 25' 49'',9013$$

Έχουμε λοιπόν:

$\varphi_1 = 38° 25' 49'',9013$ 4	Ελλειψοειδείς συντεταγμένες του σημείου 1 στο ΕΓΣΑ 87.
$\lambda_1 = 23° 31' 50'',8086$ 8	

<u>Για το σημείο 2:</u>

$$\tan\lambda_2 = \frac{y_{ΕΓΣΑ87^2}}{x_{ΕΓΣΑ87^2}} = 0,448140584 \Rightarrow \lambda_2 = 24° 08' 20'',7157$$

Το φ_2 θα υπολογιστεί από διαδοχικές προσεγγίσεις όπως και το φ_1.

Έστω ότι αρχική τιμή $\bar{\varphi}_2 = 38° 12'$

$$\tan\varphi_2' = \frac{Z_{ΕΓΣΑ87^2} + e^2 \frac{a}{(1-e^2\sin^2\bar{\varphi}_2)^{1/2}} \sin\bar{\varphi}_2}{\left[(x_{ΕΓΣΑ87^2})^2 + (y_{ΕΓΣΑ87^2})^2\right]^{1/2}} \Rightarrow \varphi_2' = 38° 12' 4'',4653$$

$\tan\varphi_2'' = 0,786957604 \Rightarrow \varphi_2'' = 38° 12' 4'',4838$

$\tan\varphi_2''' = 0,786957604 \Rightarrow \varphi_2''' = 38° 12' 4'',4839$

Άρα $\varphi_2 = 38° 12' 4'',4839$

Έχουμε λοιπόν

$\varphi_2 = 38° 12' 4'',4839$ 40	Ελλειψοειδείς συντεταγμένες του σημείου 2 στο ΕΓΣΑ 87.
$\lambda_2 = 24° 08' 20'',7157$ 8	

Θα μετατρέψω τώρα τις ελλειψοειδείς συντεταγμένες του κάθε σημείου στο ΕΓΣΑ 87, σε επίπεδες καρτεσιανές συντεταγμένες.

$$X_i = X_o + [K_o N_i] L_i + \left[K_o \frac{N_i}{6}(1 - t_i^2 + n_i^2)\right] L_i^3 + \left[K_o \frac{N_i}{120}(5 - 18t_i^2 + t_i^4 + 14n_i^2 - 58t_i^2 n_i^2)\right] L_i^5 .$$

$$Y_i = K_o M_i + \left[K_o \frac{N_i \tan\varphi_i}{2}\right] L_i^2 + \left[K_o \frac{N_i \tan\varphi_i}{24}(5 - t_i^2 + 9n_i^2 + 4n_i^4)\right] L_i^4 + \left[K_o \frac{N_i \tan\varphi_i}{720}(61 - 58t_i^2)\right] L_i^6$$

για $i = 1,2$.

Για το σημείο 1

$X_o = 500000$ m.

$K_o = 0,9996$

$N_1 = 6386401,015$ m. (στο GRS 80)

$L_1 = \Delta\lambda_1 \cdot \cos\varphi_1 = (\lambda_1 - \lambda_o) \cdot \cos\varphi_1 = (\lambda_1 - 24^\circ) \cdot \cos\varphi_1 = -0,006415292$ rad

$t_1 = \tan\varphi_1 = 0,793458131$

$n_1^2 = \frac{e^2}{1-e^2}\cos^2\varphi_1 = 0,004135736$

$M_{①}$ = μήκος τόξου μεσημβρινού από $\varphi = 0^\circ$ έως $\varphi = \varphi_1$ υπολογίστηκε με βάση το τυπολόγιο της 1ης ΑΣΚΗΣΗΣ.

$$M_{①} = a(1-e^2)(M_o\varphi_1 - M_2\sin 2\varphi_1 + M_4\sin 4\varphi_1 - M_6\sin 6\varphi_1)$$

$$M_o = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 \Rightarrow M_o = 1,005052502$$

$$M_2 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 \Rightarrow M_2 = 0,002531554$$

$$M_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{8820}e^8 \Rightarrow M_4 = 0,000002657$$

$$M_6 = \frac{35}{3072}e^6 \Rightarrow M_6 = 0,000000003$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Μετά τις πράξεις είναι $M_{①} = 4255286,881$ m.

Μετά τις αντικαταστάσεις έχω:

$$X_1 = 500.000 - 40954{,}23909 - 0{,}105220844 + 0{,}000003485 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X_1 = 459045{,}656 \ m$$

$$Y_1 = 4253534.766 + 104{,}2339773 + 0{,}000357487$$

$$\Rightarrow Y_1 = 4253689 \ m$$

$X_1 = 459045{,}65\overset{8}{\cancel{6}}\ m$ $Y_1 = 4253689.$[illegible] m ✓	Επίπεδες καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου 1 στην ΕΜΠ.

Για το σημείο 2:

$X_0 = 500000 \ m$

$K_0 = 0{,}9996$

$N_2 = 6386317{,}576 \ m.$

$L_2 = \Delta\lambda_2 \cdot \cos\varphi_2 = (\lambda_2 - \lambda_0)\cdot\cos\varphi_2 = (\lambda_2 - 24^\circ)\cos\varphi_2 = 0{,}001907665 \ rad$

$t_2 = \tan\varphi_2 = 0{,}786957604$

$n_2^2 = \dfrac{e^2}{1-e^2}\cdot\cos^2\varphi_2 = 0{,}004161975.$

$$\left.\begin{array}{l} M_{2} = a(1-e^2)\left(M_0\varphi_2 - M_2\sin 2\varphi_2 + M_4\cdot\sin 4\varphi_2 - M_6\sin 6\varphi_2\right) \\ \qquad M_0 = 1{,}005052502 \\ \qquad M_2 = 0{,}002531554 \\ \qquad M_4 = 0{,}000002657 \\ \qquad M_6 = 0{,}000000003 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_{2} = 4229835{,}947 \ m$$

Μετά τις αντικαταστάσεις έχω:

$X_2 = 500000 + 19178{,}08134 + 0{,}002842721 \quad \Rightarrow X_2 = 519178{,}084 \ m$

$Y_2 = 4228144{,}013 + 9{,}141181303 \quad \Rightarrow Y_2 = 4223153{,}154 \ m$

$X_2 = 519178.088 \ m$ $Y_2 = 4223153.156 \ m$ ✓	Επίπεδες καρτεσιανές συντεταγμένες του σημείου 2 στην ΕΜΠ.

β). Η γωνία διεύθυνσης a_{12} στην Ε.Μ.Π. είναι:

$$\tan a_{12} = \frac{X_2 - X_1}{Y_2 - Y_1} \Rightarrow a_{12} = -64°\ 19'\ 50'',5533 \xRightarrow{+180}$$

$$\Rightarrow \boxed{a_{12} = 115°\ 40'\ 9'',4467} \checkmark$$

459

Και η απόσταση είναι:

$$S_{12} = \left[(X_2-X_1)^2 + (Y_2-Y_1)^2\right]^{1/2} \Rightarrow \boxed{S_{12} = 58950,27\cancel{0}^{3}}$$

γ). Από την 4η ΑΣΚΗΣΗ έχουμε τα αποτελέσματα που δίνουν οι τύποι του Puissant. Επίσης έχουμε και τα αποτελέσματα στην προβολή Hatt. Θεωρώντας σωστά τα αποτελέσματα του Puissant θα συγκρίνω τις παραμορφώσεις που έχει η προβολή Hatt μ' αυτές της Ε.Μ.Π.

	S_{12} (m)	a_{12}	Παραμορφώσεις ΔS_{12} (m)	Παραμορφώσεις Δa_{12}
Puissant	58973,60	115° 22' 40'',6370		
Hatt	58973,61	115° 38' 53'',7972	+0,01	+0° 16' 13'',1602
ΕΜΠ	58950,27	115° 40' 9'',4467	−23,33	+0° 17' 28'',8097

Παρατηρούμε ότι οι παραμορφώσεις που επιφέρει η ΕΜΠ. στην απόσταση S είναι εκατονταπλάσιες απ' αυτές που επιφέρει η προβολή Hatt. Αντίθετα, οι παραμορφώσεις στη γωνία διεύθυνσης κινούνται περίπου στα ίδια επίπεδα.

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΓΕΩΔΑΙΣΙΑΣ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΑΣ

ΓΕΩΔΑΙΤΙΚΟΙ ΚΑΙ ΧΑΡΤΟΓΡΑΦΙΚΟΙ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ

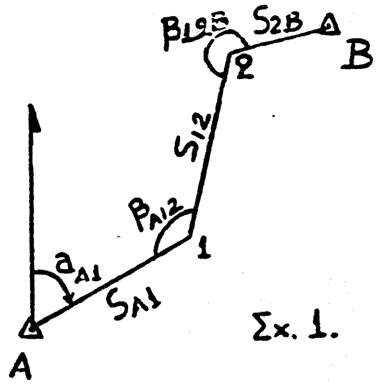
ΓΡΙΒΑΣ ΝΙΚΟΛΑΟΣ.
9ο εξάμηνο

ΑΣΚΗΣΗ 6

Η Εγκάρσια Μερκατορική Προβολή (ΕΜΠ) που αναφέρεται στο ΕΓΣΑ 87 και χρησιμοποιεί το ελλειψοειδές GRS'80 (a=6 378 137, 1/f=298.2572221, e=.08181919104) έχει το βασικό πλεονέκτημα σε σχέση με τη προβολή Hatt ότι χρησιμοποιεί ένα κέντρο προβολής σε όλο τον Ελληνικό χώρο. Η χρήση πολλών κέντρων προβολής στην Hatt έχει σαν αποτέλεσμα οι παραμορφώσεις στην απεικόνιση της φ.γ.ε. να είναι αμελητέες (<5ppm) και κατά συνέπεια δεν χρειάζονται αναγωγές γωνιών και αποστάσεων στους υπολογισμούς πάνω στη προβολή. Πρέπει να γίνει σαφές ότι αντίθετα στην ΕΜΠ οι μετρήσεις που πραγματοποιούνται στο πεδίο πρέπει να υπόκεινται προηγούμενα σε κάποιες αναγωγές πριν να χρησιμοποιηθούν για υπολογισμούς πάνω στην προβολή.

Ενα παράδειγμα για τις απαιτούμενες αναγωγές των μετρουμένων μεγεθών προκειμένου να χρησιμοποιηθούν για την επίλυση μιας όδευσης πάνω στην προβολή δίνεται στη συνέχεια. Είναι προφανές ότι οι ίδιες ακριβώς αναγωγές απαιτούνται για την επίλυση κάποιου δίκτυου ή οποιασδήποτε άλλης γεωδαιτικής εφαρμογής.

Το παράδειγμα είναι μιά ανοικτή όδευση με 4 κορυφές που δίνεται στο σχήμα (1). Στην όδευση αυτή είναι γνωστές οι συντεταγμένες του πρώτου σημείου (Α), η αρχική γωνία διεύθυνσης a_{A1}, καθώς και οι μετρήσεις των γωνιών β_{A12}, β_{12B} και των αποστάσεων S_{A1}, S_{12}, S_{2B}. Στις αποστάσεις έχουν προηγούμενα γίνει διορθώσεις για τη ταχύτητα διάδοσης του σήματος (ατμοσφαιρική διόρθωση), την κλίση και έχει γίνει αναγωγή στο Ελλειψοειδές Αναφοράς.



Σχ. 1.

Για τον έλεγχο του κλεισίματος της όδευσης δίνονται επιπλέον οι συντεταγμένες του σημείου (Β).

Για την αναγωγή των γωνιών που μετρούνται στο πεδίο (και ουσιαστικά ταυτίζονται με τη γωνία πάνω στο ελλειψοειδές αν θεωρηθούν αμελητέες η απόκλιση της κατακορύφου και η διαφορά της γεωδαισιακής γραμμής από την κάθετη τομή) στις αντίστοιχες γωνίες πάνω στην απεικόνιση ισχύει η σχέση:

$$\beta_{\overline{123}} = \alpha_{23} - \alpha_{21} = A_{23} - \gamma_2 + \delta_{23} - A_{21} + \gamma_2 - \delta_{21}$$

$$= (A_{23} - A_{21}) + (\delta_{23} - \delta_{21})$$

$$= \beta_{\tilde{123}} + (\delta_{23} - \delta_{21})$$

όπου $\beta_{\tilde{123}}$ είναι η γωνία που μετράται στο πεδίο.
και δ_{23}, δ_{21} είναι η αναγωγή της εφαπτόμενης της γεωδαισιακής γραμμής στη χορδή και δίνεται από την απλοποιημένη σχέση:

$$\delta_{12} = 7^{cc}.836\ (Y_1 - Y_2)(X_{1/3} - 0.5)$$

όπου Y_1, Y_2 οι τεταγμένες των σημείων εκφρασμένες σε Km και

$$X_{1/3} = \frac{2X_1 + X_2}{3}$$ εκφρασμένο σε Mm.

Οι πλευρές επίσης μετά την αναγωγή τους για τις ατμοσφαιρικές καθυστερήσεις, τη κλίση και την αναγωγή στο ελλειψοειδές μετατρέπονται σε μήκη πάνω στην προβολή προσδιορίζοντας την κλίμακα παραμόρφωσης των μηκών K.

$$K = \kappa\ 10^{-6} + 1$$

όπου $\kappa = 12\ 311(X-0.5)^2 - 400$ (σε ppm)

Το X είναι εκφρασμένο σε Mm στην σχέση αυτή και για πεπερασμένα μήκη (<25 Km) μπορεί να προσδιοριστεί μιά ενιαία κλίμακα για το μήκος αν σαν X δοθεί $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$.

Χρησιμοποιώντας τις δύο παραπάνω αναγωγές ζητείται η επίλυση της όδευσης όταν δίνονται τα παρακάτω στοιχεία:

$X_A = 313\ 259.17m$ $Y_A = 4\ 356\ 006.55m$ $a_{A1} = 68^g.19450$

$S_{A1} = 22\ 166.25m$ $S_{12} = 25\ 187.12m$ $S_{2B} = 4\ 358.44m$

$\tilde{\beta}_{A12} = 166^g.50947$ $\tilde{\beta}_{12B} = 229^g.20041$

Για τον έλεγχο κλεισίματος της όδευσης τέλος δίνονται οι συντεταγμένες του σημείου (B) :

$X_B = 349\ 452.73m$ $Y_B = 4\ 390\ 499.79m$

Προσδιορίστε το γεωδαιτικό αζιμούθιο A_{A1} της διεύθυνσης A-1 από την γωνία διεύθυνσης a_{A1}.

$$A_{A1} = a_{A1} + \gamma_A - \delta_{A1}$$

$$\gamma_1 = \frac{X}{N'} \tan\varphi' + \frac{X^3}{3N'^3} \tan\varphi' (1 + \tan\varphi' - e'^2 \cos^2\varphi') \qquad X = x - x_0$$

Οπου το φ' προσδιορίζεται με διαδοχικές προσεγγίσεις απο τη σχέση που δίνει το τόξο μεσημβρινού:

$$M_0^{\Phi\prime} = M_0\varphi' - 2M_2 \sin\varphi' \cos\varphi' + 2M_4 \sin2\varphi' \cos2\varphi' - 2M_6 \sin3\varphi' \cos3\varphi'$$

και $N' = \dfrac{a}{(1-e^2 \sin^2\varphi')^{1/2}}$, $e' = \dfrac{e}{(1-e^2)^{1/2}}$

Παράδοση:

ΓΒ/ΒΜ/ΧΛ: 14/11/89

Αρχικά προσδιορίζω κατά προσέγγιση τη θέση των σημείων 1 και 2.

$\Delta X_{A1} = X_1 - X_A = S_{A1} \cdot \sin a_{A1} \Rightarrow X_1 = 332716{,}14\ m.$

$\Delta Y_{A1} = Y_1 - Y_A = S_{A1} \cdot \cos a_{A1} \Rightarrow Y_1 = 4366625{,}83\ m.$

$a_{12} = a_{A1} + \tilde{\beta}_{A12} + 200 - 400 \Rightarrow a_{12} = 34^g{,}70397$

$\Delta X_{12} = X_2 - X_1 = S_{12} \cdot \sin a_{12} \Rightarrow X_2 = 345776{,}37\ m.$ ✓

$\Delta Y_{12} = Y_2 - Y_1 = S_{12} \cdot \cos a_{12} \Rightarrow Y_2 = 4388162{,}34\ m.$

Διόρθωση της γωνίας θλάσης β_{A12}:

$\beta_{\overline{A12}} = \tilde{\beta}_{A12} + (\delta_{12} - \delta_{1A}).$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{12} &= 7^{cc}{,}836 (Y_1 - Y_2)\left(\frac{2X_1 + X_2}{3} - 0{,}5\right) \\ Y_1 - Y_2 &= -21{,}53651\ Km. \\ \frac{2X_1 + X_2}{3} &= 0{,}33706955\ Mm \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_{12} = 27^{cc}{,}496 = 0^g{,}0027496 \ ✓$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{1A} &= 7^{cc}{,}836 (Y_1 - Y_A)\left(\frac{2X_1 + X_A}{3} - 0{,}5\right) \\ Y_1 - Y_A &= +10{,}61928\ Km. \\ \frac{2X_1 + X_A}{3} &= 0{,}3262304833\ Mm. \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_{1A} = -14^{cc}{,}460 = -0^g{,}0014460 \ ✓$$

Άρα $\beta_{\overline{A12}} = 166^g{,}51367$ ✓

Προσδιορισμός της κλίμακας παραμόρφωσης K_{A1} του μήκους S_{A1}:

$$\left.\begin{aligned} K_{A1} &= \kappa \cdot 10^{-6} + 1. \\ \kappa &= 12311\left(\frac{X_A + X_1}{2} - 0{,}5\right)^2 - 400 \\ \frac{X_A + X_1}{2} &= 0{,}322987655\ Mm \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_{A1} = 0{,}999986 \ ✓$$

Επαναπροσδιορισμός της γωνίας διεύθυνσης a_{12}

$a'_{12} = a_{A1} + \beta_{\overline{A12}} + 200 - 400 = 34^g{,}70817$ ✓

και των συντεταγμένων του σημείου 2:

$\Delta X'_{12} = X'_2 - X_1 = S_{12} \cdot \sin a'_{12} \Rightarrow X'_2 = 345777{,}79\ m$

$\Delta Y'_{12} = Y'_2 - Y_1 = S_{12} \cdot \cos a'_{12} \Rightarrow Y'_2 = 4388161{,}48\ m$

Επειδή $S_{12} > 25\,Km$ χωρίζω στα δύο την απόσταση:

$S_{1M} = 13\,Km = 13000\,m$ και $S_{M2} = 12187{,}12\,m$.

Υπολογίζω τις συντεταγμένες του σημείου M σε απόσταση 13000 m από το σημείο 1.

$$X_M - X_1 = S_{1M} \cdot \sin \alpha'_{12} \Rightarrow X_M = 339457{,}74\,m$$

$$Y_M - Y_1 = S_{1M} \cdot \cos \alpha'_{12} \Rightarrow Y_M = 4377741{,}17\,m.$$

Προσδιορισμός της κλίμακας παραμόρφωσης K_{1M} και K_{M2} των μηκών S_{1M} και S_{M2} αντίστοιχα:

$$\left.\begin{aligned} &K_{1M} = \kappa \cdot 10^{-6} + 1 \\ &\kappa = 12311\left(\frac{X_1 + X_M}{2} - 0{,}5\right)^2 - 400 \\ &\frac{X_1 + X_M}{2} = 0{,}33608694 \quad Mm \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_{1M} = 0{,}999931$$

$$\left.\begin{aligned} &K_{M2} = \kappa \cdot 10^{-6} + 1 \\ &\kappa = 12311\left(\frac{X_M + X'_2}{2} - 0{,}5\right)^2 - 400 \\ &\frac{X_M + X'_2}{2} = 0{,}342617765\,Mm \end{aligned}\right\} \Rightarrow K_{M2} = 0{,}999905$$

Τα παραπάνω μήκη πάνω στην προβολή είναι:

$$S'_{A1} = K_{A1} \cdot S_{A1} = 22165{,}94\,m$$

$$\left.\begin{aligned} &S'_{1M} = K_{1M} \cdot S_{1M} = 12999{,}10\ m \\ &S'_{M2} = K_{M2} \cdot S_{M2} = 12185{,}96\ m \end{aligned}\right\} \Rightarrow S'_{12} = S'_{1M} + S'_{M2} \Rightarrow S'_{12} = 25185{,}06$$

Διόρθωση της γωνίας θλάσης β_{12B}:

$$\beta_{\overline{12B}} = \beta_{\widetilde{12B}} + (\delta_{2B} - \delta_{21})$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta_{2B} = 7^{cc}{,}836\left(Y'_2 - Y_B\right)\left(\frac{2X'_2 + X_B}{3} - 0{,}5\right) \\ &Y'_2 - Y_B = -2{,}33831 \quad Km \\ &\frac{2X'_2 + X_B}{3} = 0{,}34700277 \quad Mm \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_{2B} = +2^{cc}{,}803 = +0^{g}{,}0002803$$

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{21}=7^{cc},836\left(Y_2'-Y_1\right)\left(\frac{2X_2'+X_1}{3}-0,5\right)^2\\ Y_2'-Y_1=+21,53565 \text{ Km}\\ \frac{2X_2'+X_1}{3}=0,341423906 \quad \text{Mm}\end{array}\right\}\Rightarrow \delta_{21}=-26^{cc},760=-0^{g},0026760$$ ✓

Άρα $\beta_{\overline{12B}}=229^{g},20337$ ✓

Προσδιορισμός της γωνίας διεύθυνσης α_{2B}

$\alpha_{2B}=\alpha_{12}'+\beta_{\overline{12B}}+200-400 \Rightarrow \alpha_{2B}=63^{g},91154$ ✓

Προσδιορισμός της κλίμακας παραμόρφωσης K_{2B} του μήκους S_{2B}:

$$\left.\begin{array}{l}K_{2B}=\kappa\, 10^{-6}+1\\ \kappa=12311\left(\frac{X_2'+X_B}{2}-0,5\right)^2-400\\ \frac{X_2'+X_B}{2}=0,34761526 \quad \text{Mm}\end{array}\right\}\Rightarrow K_{2B}=0,999886$$ ✓

Πάνω στην προβολή το μήκος αυτό είναι:

$S_{2B}'=K_{2B}\cdot S_{2B} \Rightarrow S_{2B}'=4357,94 \text{ m}$ ✓

Έχοντας λοιπόν τις διορθωμένες γωνίες θλάσης

$\beta_{\overline{A12}}=166^{g},51367$ $\quad\quad$ $\beta_{\overline{12B}}=229^{g},20337$ ✓

τις τελικές γωνίες διεύθυνσης

$\alpha_{A1}=68^{g},19450$ της πλευράς A1

$\alpha_{12}'=34^{g},70817$ της πλευράς 1-2

$\alpha_{2B}=63^{g},91154$ της πλευράς 2-B ✓

τα διορθωμένα μήκη των πλευρών

$S_{A1}'=22165,94 \text{m}$ της πλευράς A-1

$S_{12}'=25185,06 \text{m}$ της πλευράς 1-2

$S_{2B}'=4357,94 \text{ m}$ της πλευράς 2-B ✓

και τις συντεταγμένες του σημείου A

$X_A=313259,17 \text{ m}$ $\quad\quad$ $Y_A=4356006,55 \text{ m}$

υπολογίζω τις τελικές συντεταγμένες των σημείων 1,2:

$$X_1 - X_A = S'_{A1}\cdot\sin\alpha_{A1} \Rightarrow \boxed{X_1 = 332715,87\ m}$$
$$Y_1 - Y_A = S'_{A1}\cdot\cos\alpha_{A1} \Rightarrow \boxed{Y_1 = 4366625,68\ m}$$

$$X_2 - X_1 = S'_{12}\cdot\sin\alpha'_{12} \Rightarrow \boxed{X_2 = 345776,45\ m}$$
$$Y_2 - Y_1 = S'_{12}\cdot\cos\alpha'_{12} \Rightarrow \boxed{Y_2 = 4388159,57\ m}$$

$$X_B - X_2 = S'_{2B}\cdot\sin\alpha'_{12} \Rightarrow X_B = 349452,73\ m$$ (για τον έλεγχο)
$$y_B - Y_B = S'_{2B}\cdot\cos\alpha'_{12} \Rightarrow y_B = 4390499,78\ m$$

Προσδιορισμός του αζιμουθίου A_{A1} της διεύθυνσης Α-1.

Θα προσδιορίσω πρώτα με διαδοχικές προσεγγίσεις το φ' από τη σχέση:

$$M_0^{\varphi'} = M_0\varphi' - 2M_2\sin\varphi'\cos\varphi' + 2M_4\sin2\varphi'\cdot\cos2\varphi' - 2M_6\sin3\varphi'\cdot\cos3\varphi' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M = M_0\varphi' - M_2\cdot\sin2\varphi' + M_4\cdot\sin4\varphi' - M_6\cdot\sin6\varphi' \qquad (I)$$

στο GRS'80 έχω: $e^2 = 0,00669438$.

$$M_0 = 1 + \frac{3}{4}e^2 + \frac{45}{64}e^4 + \frac{175}{256}e^6 + \frac{11025}{16384}e^8 \Rightarrow M_0 = 1,005052502$$

$$M_2 = \frac{3}{8}e^2 + \frac{15}{32}e^4 + \frac{525}{1024}e^6 + \frac{2205}{4096}e^8 \Rightarrow M_2 = 0,002531554$$

$$M_4 = \frac{15}{256}e^4 + \frac{105}{1024}e^6 + \frac{2205}{8820}e^8 \Rightarrow M_4 = 0,000002657$$

$$M_6 = \frac{35}{3072}e^6 \Rightarrow M_6 = 0,000000003$$

Με αρχικό $\varphi' = 39° = 0,680678408$ rad έχω $M' = 0,681642386$.

Το φ' θα διορθωθεί κατά

$$\Delta\varphi' = \frac{Y_1}{K}\,\frac{1}{R} - M' \xrightarrow[K=0,9996]{R=a=6378137} \Delta\varphi' = 0,003255575\ \text{rad}$$

Τότε θα έχω $\varphi'' = \varphi' + \Delta\varphi' = 0{,}683933983 \text{ rad} \Rightarrow \varphi'' = 39^\circ\ 11'\ 11'',5104$.

Αντικαθιστώ το φ'' ξανά στον τύπο (I) και έχω

$$M'' = 0{,}684911004$$

Το φ'' θα διορθωθεί κατά

$$\Delta\varphi'' = \frac{Y_1}{K}\frac{1}{R} - M'' \Rightarrow \Delta\varphi'' = -0{,}000013042 \text{ rad}$$

$$\varphi''' = \varphi'' + \Delta\varphi'' = 0{,}68392094 \text{ rad} \Rightarrow \varphi''' = 39^\circ\ 11'\ 8'',8202$$

Αντικαθιστώ το φ''' στον τύπο (I):

$$M''' = 0{,}684897908$$

Διορθώνω το φ''' κατά

$$\Delta\varphi''' = \frac{Y_1}{K}\frac{1}{R} - M''' \Rightarrow \Delta\varphi''' = 0{,}000000052 \text{ rad}.$$

$$\varphi^{(4)} = \varphi''' + \Delta\varphi''' = 0{,}683920992 \text{ rad} \Rightarrow \varphi^{(4)} = 39^\circ\ 11'\ 8'',8310$$

Αντικαθιστώ το $\varphi^{(4)}$ στον τύπο (I):

$$M^{(4)} = 0{,}684897961$$

Διορθώνω το $\varphi^{(4)}$ κατά

$$\Delta\varphi^{(4)} = \frac{Y_1}{K}\frac{1}{R} - M^{(4)} \Rightarrow \Delta\varphi^{(4)} = 0$$

Άρα τελικά το $\boxed{\varphi' = \varphi^{(4)} = 39^\circ\ \cancel{11'\ 8'',8310}}$

$39^\circ\ 21'\ 12''.6$ [illegible]

$$N' = \frac{a}{(1 - e^2 \sin^2\varphi')^{1/2}} \Rightarrow N' = 6386676{,}962 \ m$$

$$e' = \frac{e}{(1-e^2)^{1/2}} \Rightarrow e' = 0{,}082094438$$

$$\gamma_1 = \frac{X_1 - 500000}{N'}\tan\varphi' + \frac{(X_1 - 500000)^3}{3N'^3}\tan\varphi'(1 + \tan\varphi' - e'^2\cos^2\varphi') \Rightarrow \gamma_1 = -0{,}021360246 \text{ rad} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \gamma_1 = -1^g{,}35983$$

$$\left.\begin{aligned} \delta_{A1} &= 7^{cc}{,}836\,(Y_A - Y_1)\left(\frac{2X_A + X_1}{3} - 0{,}5\right) \\ Y_A - Y_1 &= -10{,}61913 \text{ Km} \\ \frac{2X_A + X_1}{3} &= 0{,}319744736 \text{ Mm} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta_{A1} = 14^{cc}{,}999 = 0^g{,}0014999$$

Τελικά $A_{A1} = a_{A1} + \gamma_1 - \delta_{A1} \Rightarrow \boxed{A_{A1} = 66^g{,}83317}$