2.0 Η κίνηση των δορυφόρων

2.1 Γενικά

Η κίνηση ενός τεχνητού δορυφόρου γύρω από τη γη εκφράζεται από μια πολύπλοκη τροχιά, μια ανοικτή σπείρα στο χώρο, που υπολογίζεται με τους νόμους της ουράνιας μηχανικής. Αν ο δορυφόρος βρεθεί σε κάποιο σημείο X, Y, Z του διαστήματος με μία αρχική ταχύτητα $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ η κίνησή του θα καθοριστεί από τις δυνάμεις που δρουν επάνω του. Η σημαντικότερη δύναμη είναι εκείνη που προκαλείται από την έλξη της μάζας της γης σύμφωνα με το νόμο του Νεύτωνα. Η έλξη του ήλιου και της σελήνης επηρεάζουν επίσης την τροχιά όχι μόνο άμεσα με την ελκτική δύναμη που ασκούν τα δύο αυτά σώματα, αλλά και έμμεσα με τις παλίρροιες του γήϊνου φλοιού και των ωκεανών που έχουν σαν αποτέλεσμα να μεταβάλλουν την κατανομή των μαζών στη γη.

Εκτός από τις δυνάμεις αυτές που οφείλονται σε ελκτικά πεδία υπάρχουν και δυνάμεις που ασκούνται στο δορυφόρο και που οφείλονται στην τριβή του, στην έστω και πολύ αραιή ατμόσφαιρα, στην πίεση που ασκείται επάνω του από την ηλιακή ακτινοβολία και την έμμεση ακτινοβολία της γης καθώς και σε ενδεχόμενες μαγνητικές δυνάμεις. Τέλος, ιδιαίτερα αν χρησιμοποιούνται χρονόμετρα, για πολύ μεγάλη ακρίβεια θα πρέπει να υπολογιστεί και η επίδραση της σχετικότητας.

Βεβαίως ένας δορυφόρος που κινείται γύρω από τη γη χαμηλά επηρεάζεται περισσότερο από την τριβή στην ατμόσφαιρα, ενώ ένας δορυφόρος που κινείται ψηλά επηρεάζεται περισσότερο από την πίεση της ηλιακής ακτινοβολίας.

Αν θεωρήσουμε γνωστά τα πεδία έλξης (κυρίως της γης) και αγνοήσουμε την επίδραση της τριβής και της ηλιακής ακτινοβολίας, τότε η γνώση των 6 στοιχείων $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ για το χρόνο T_0 είναι αρκετή για να μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη θέση του δορυφόρου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή T. Ο προσδιορισμός της θέσης του δορυφόρου για μία ή περισσότερες χρονικές στιγμές λέγεται προσδιορισμός των **εφημερίδων** του δορυφόρου. Ο υπολογισμός αυτός μπορεί να γίνει ή με αναλυτική μέθοδο ή με αριθμητική ολοκλήρωση. Από παρατηρήσεις άλλωστε του δορυφόρου σε διάφορους χρόνους (ή εποχές) μπορούμε να υπολογίσουμε τα στοιχεία $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$ για το χρόνο T_0. Αυτό λέγεται προσδιορισμός της **τροχιάς** του δορυφόρου.

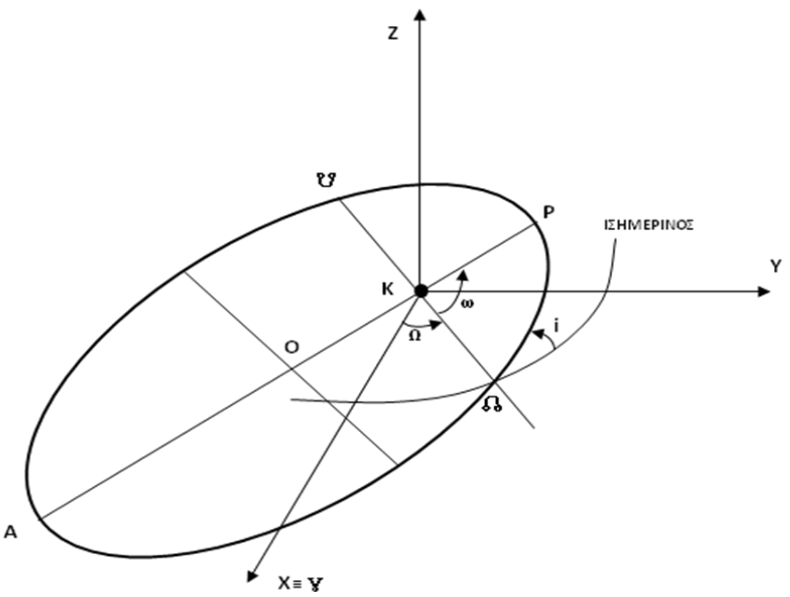
Ο προσδιορισμός των στοιχείων της τροχιάς και των εφημερίδων των δορυφόρων είναι ένα ιδιαίτερα πολύπλοκο και δύσκολο πρόβλημα γι αυτό και στις επόμενες παραγράφους θα δοθούν μόνο οι γενικές αρχές.

2.2. Η κεπλέρια κίνηση

Αν θεωρήσουμε ότι η γη είναι σφαίρα με συμμετρική κατανομή της μάζας της, τότε το πεδίο έλξης της είναι το ίδιο με μία σημειακή μάζα και ο δορυφόρος θα κινείται σύμφωνα με τους νόμους του Kepler.

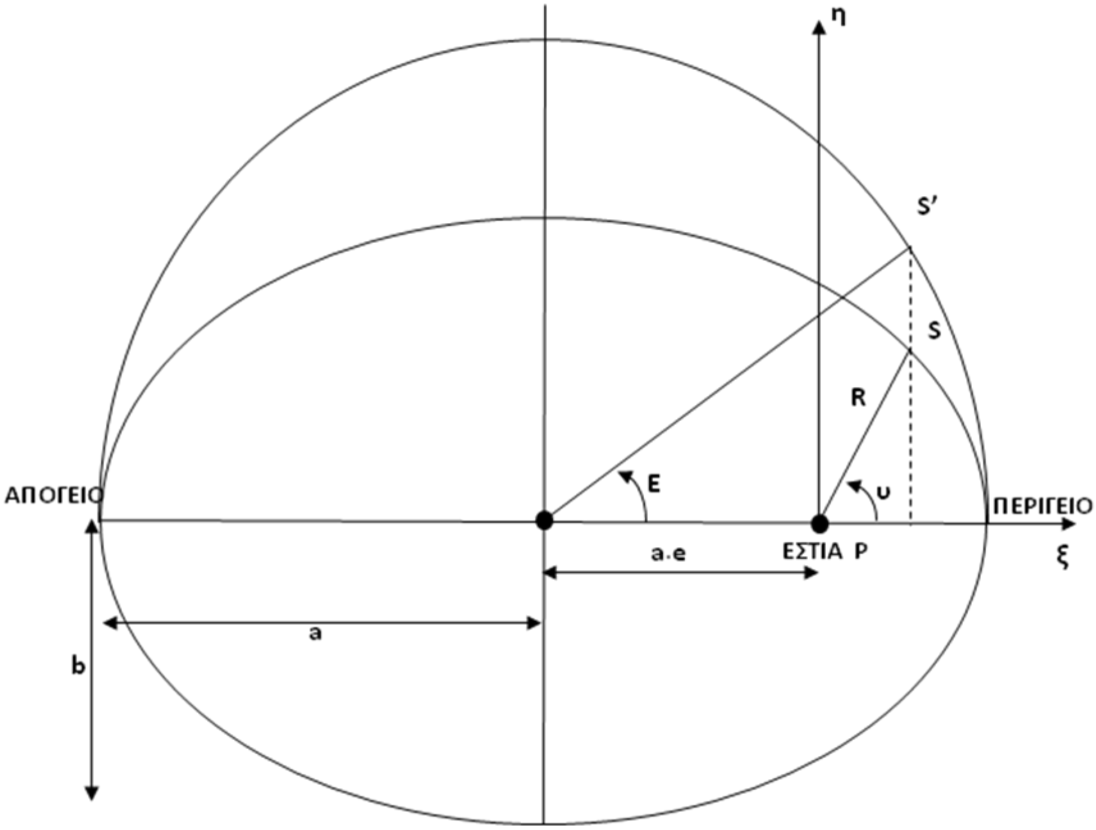
I. Η τροχιά ενός δορυφόρου είναι έλλειψη με το κέντρο μάζας της γης σε μία εστία.
II. Η ακτίνα δορυφόρου-γης σαρώνει την έλλειψη με σταθερό ρυθμό (ή σε ίσους χρόνους γράφει ίσα εμβαδά).
III. Το τετράγωνο της περιόδου περιστροφής είναι ανάλογο του κύβου του ημιάξονα της έλλειψης ή $n^2 a^3 = ct$.

Η προσέγγιση της σφαιρικής γης είναι, πρέπει να σημειωθεί, πολύ ικανοποιητική δεδομένου ότι οι αποχές από τη σφαιρικότητα είναι πολύ μικρές (1/300).



Σχήμα 1

Οι διαστάσεις της ελλείψεως θα ορίζονται από τον μεγάλο ημιάξονα a και την εκκεντρότητα e και ο προσανατολισμός της ελλείψεως στο αστρικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα ορίζεται με τις τρεις γωνίες Ω (ορθή αναφορά του ανιόντος δεσμού) i (κλίση) και ω (στοιχείο του περιγείου), όπως φαίνονται στο σχήμα. Τα δύο σημεία στον μεγάλο ημιάξονα που απέχουν το λιγότερο και το περισσότερο από το κέντρο της γης (την εστία της ελλείψεως) λέγονται αντίστοιχα περίγειο και απόγειο.



Σχήμα 2

Στην έλλειψη ο δορυφόρος κινείται έτσι ώστε τα εμβαδά που διαγράφει η επιβατική ακτίνα να είναι ανάλογα με τους χρόνους η δε περίοδος P του δορυφόρου (ο χρόνος για να επανέλθει στο ίδιο σημείο) ή η ίδια του κίνηση n (μέση γωνιακή του ταχύτητα) συνδέονται με τον ημιάξονα a με την σχέση:

$$\frac{a^3}{P^2} = a^3 n^2 = GM_\oplus \qquad 2.1$$

όπου

$$n = \frac{1}{P(\equiv T)} \qquad 2.2$$

η μέση κίνηση του δορυφόρου, G η παγκόσμιος σταθερά της έλξης και M η μάζα της γης ($GM_{\oplus} = 3.9860047 \cdot 10^{20} cm^3 \sec^{-2} = 0.753712218 rev^2 Mm^3 day^{-2}$).

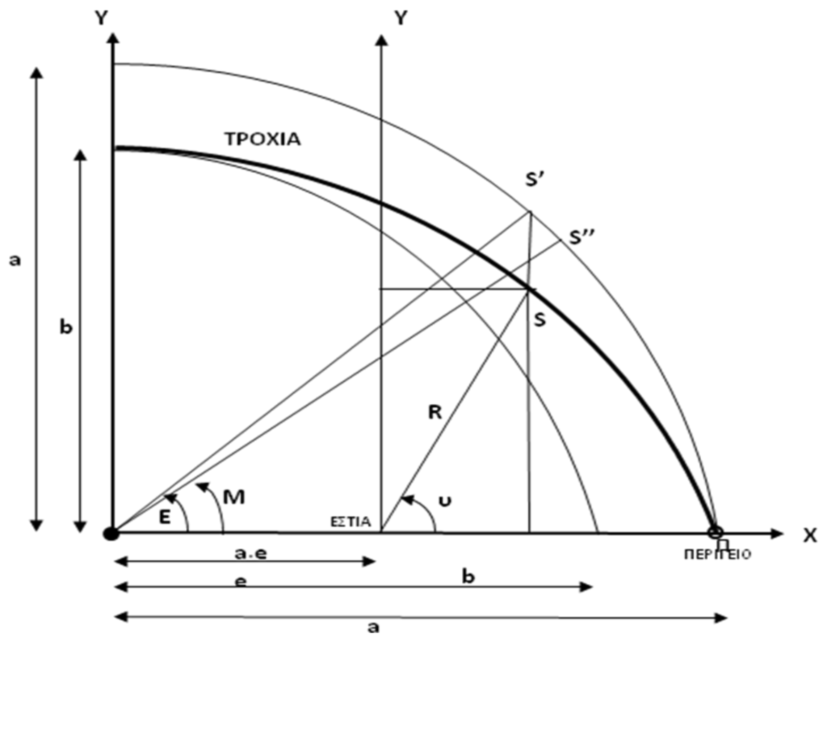
Η θέση του δορυφόρου στην έλλειψη ορίζεται με την βοήθεια της γεωκεντρικής γωνίας υ (αληθής ανωμαλία), που συνδέεται με τη βοηθητική γωνία E (έκκεντρη ανωμαλία) με τη σχέση:

$$\tan\frac{\upsilon}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{E}{2} \qquad 2.3$$

όπου

$$e = \sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2}} \qquad 2.4$$

Για τον υπολογισμό της γωνίας υ χρησιμοποιείται η μέση ανωμαλία M, που αντιστοιχεί στη θέση ενός φανταστικού δορυφόρου S', που θα διέγραφε έναν κύκλο με σταθερή γωνιακή ταχύτητα n. Η γωνία M συνδέεται με την E με την εξίσωση του Kepler.



Σχήμα 3

$$M = E - e \cdot \sin E \qquad 2.5$$

Διαφορίζοντας

$$dM = dE - e \cdot \cos E \cdot dE$$

$$dE = \frac{dM}{1 - e \cdot \cos E} \qquad 2.6$$

Η λύση της (2.5) γίνεται με τη βοήθεια της (2.6) με διαδοχικές προσεγγίσεις (π.χ.)

Με δεδομένα e, M

$$M \equiv E_1 \to M_1 \to M - M_1 \to \Delta E_1$$
$$E_2 \to M_2 \to M - M_2 \to \Delta E_2$$
$$E_3 \to M_3 \to M - M_3 \to \Delta E_3 ....$$

Αν $M_i = M$, τέλος των προσεγγίσεων (εν γένει χρειάζεται τρεις). Το M έχει υπολογισθεί για τον χρόνο T ως $M = M_0 + n\left(T - T_0\right)$.

Αν (π.χ.) δίδονται η εκκεντρότητα e και η μέση ανωμαλία M

$$e = 0.0244296637$$
$$M = 345^o.5495997$$
$$E_1 = M = 345^o.5495997$$

Αφού μετατραπούν οι μοίρες σε ακτίνια:

$$M_1 = 6.037074466$$

$$\Delta E_1 = -0.006243934$$
$$E_2 = 6.024734310$$
$$M_2 = 6.030978124$$

$$\Delta E_2 = 0.000000123$$

$E_3 = 6.024734433$

$M_3 = 6.030978244$

$E_3 = 6.024734433\left(rad\right)$

$E_3 = 345^o.1918557$

$E_3 = 345^o 11' 30''.680$

Η μέση ανωμαλία M για τη χρονική στιγμή T υπολογίζεται από τη σχέση $M = M_0 + n\left(T - T_0\right)$ όπου M_0 η μέση ανωμαλία που είχε ο δορυφόρος τη στιγμή T_0.

Η επιβατική ακτίνα R και οι συντεταγμένες ξ, η του δορυφόρου στο επίπεδο της τροχιάς του μπορούν να υπολογιστούν τώρα ή με τη βοήθεια της γωνίας υ, ή με τη γωνία E με τις επόμενες σχέσεις:

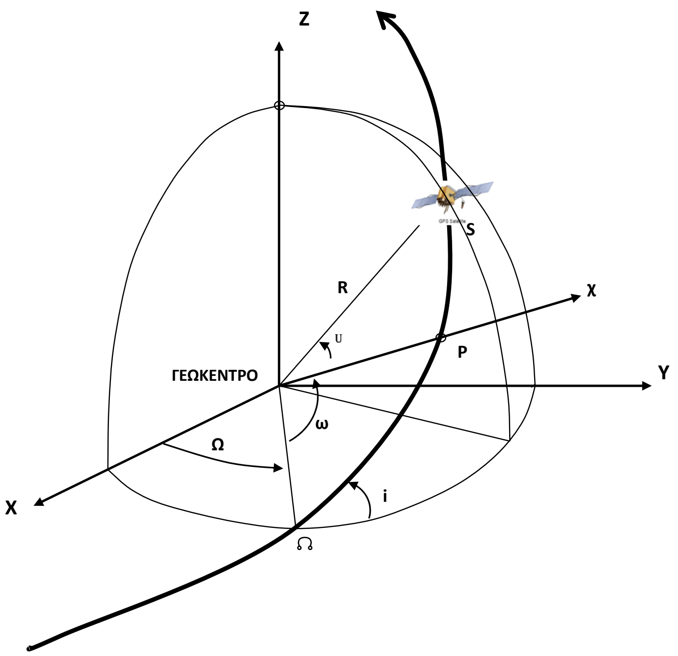
$$R = a(1 - e\cdot\cos E) = a\frac{1-e^2}{1+e\cdot\cos\upsilon} \qquad 2.7$$

$$\xi = a(\cos E - e) = R\cdot\cos\upsilon$$

$$2.8$$

$$\eta = b\cdot\sin E = R\cdot\sin\upsilon$$

Η διεύθυνση (γεωκεντρική) του δορυφόρου και οι συντεταγμένες του στο γεωκεντρικό αστρικό σύστημα X, Y, Z μπορούν να υπολογιστούν ή με τη βοήθεια των αντίστοιχων σφαιρικών τριγώνων ή με μια κατάλληλη στροφή του συστήματος ξ, η κατά τρεις γωνίες ω, i, Ω.



Σχήμα 4

Η ορθή αναφορά και απόκλιση (γεωκεντρική) θα είναι:

$$\alpha = \Omega + \arctan(\cos i \cdot \tan(\omega + \upsilon))$$

2.9

$$\sin\delta + \sin i \cdot \sin(\omega + \upsilon)$$

και οι συντεταγμένες (αναφερόμενες στο σύστημα αδρανείας) θα είναι:

$$X = R\cos\delta\cos\alpha$$
$$Y = R\cos\delta\sin\alpha \qquad 2.10$$
$$Z = R\sin\delta$$

Οι συντεταγμένες μπορούν να δοθούν και από τις ξ, η (και ζ ο εκτός του επιπέδου της τροχιάς όρος) απ΄ευθείας:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos i \sin\omega \sin\Omega + \cos\omega\cos\Omega & -\cos i \cos\omega \sin\Omega - \sin\omega\cos\Omega & \sin\Omega \sin i \\ \cos i \sin\omega \cos\Omega + \cos\omega\cos\Omega & \cos i \cos\omega\cos\Omega - \sin\omega\sin\Omega & -\cos\Omega \sin i \\ \sin i \sin\omega & \sin i \cos\omega & \cos i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{bmatrix} \quad 2.11$$

Για την μετατροπή των συντεταγμένων αυτών από το σύστημα αναφοράς της τροχιάς, που συνήθως είναι το αστρικό σύστημα στο γήϊνο σύστημα αναφοράς θα πρέπει να υπολογιστούν οι στροφές που οφείλονται στην αστρική γωνία (ϑ) και την κίνηση του πόλου x, y.

Από τα προηγούμενα φαίνεται ότι η τροχιά ενός δορυφόρου στην περίπτωση μιάς σφαιρικής γης ορίζεται πλήρως, αν δώσουμε για κάποια χρονική στιγμή T_0 τα επόμενα έξη Κεπλέρια στοιχεία $\Omega, \omega, i, e, n, M_0$. Τα στοιχεία αυτά συνδέονται φυσικά με τα $X, Y, Z, \dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$.

2.3 Οι παρέλξεις

Επειδή η διαφορά της πραγματικής γης από μία σφαίρα δεν είναι πολύ μεγάλη, η τροχιά των δορυφόρων μπορεί να υπολογιστεί με τη βοήθεια μιάς κεπλέριας τροχιάς στην οποία επιφέρουμε μικρές μεταβολές, που προέρχονται από την απόκλιση του πραγματικού πεδίου βαρύτητας της γης από το πεδίο βαρύτητας μιάς σφαίρας.

Το δυναμικό έλξης της γης αναπτύσσεται σε μια σειρά σφαιρικών αρμονικών στη μορφή:

$$-V = \frac{GM}{r}\left[1 - \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{n} J_{nm} P_{nm}\left(\cos m(\lambda - \lambda_{nm})\right)\right] \quad 2.12$$

$$-V = \frac{GM}{r}\left[1 + \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a_{\oplus}}{r}\right)^{n} P_{nm}(\sin\varphi)(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda)\right] \quad 2.13$$

Όπου $a_{\oplus}$ ο ημιάξονας της γης, J_{nm} και λ_{nm} ή C_{nm} ή S_{nm} συντελεστές που εξαρτώνται από την κατανομή των μαζών στην γη και P_{nmj} τα γενικευμένα πολυώνυμα του Legendre.

Στην πράξη ο δείκτης n δεν φτάνει φυσικά στο ∞, αλλά μέχρι κάποια τιμή που σήμερα είναι γύρω στο 36.

Στη σειρά αυτή ο κύριος όρος GM/r αντιστοιχεί στο δυναμικό που προκαλείται από μία σημειακή μάζα δηλαδή από μια σφαιρική γη. Ο επόμενος σημαντικός όρος είναι εκείνος που αντιστοιχεί στον J_{20} και που οφείλεται στην επιπλάτυνση της γής. Ο συντελεστής αυτός για τη γη είναι της τάξεως του 10^{-3} ($1.08263 \cdot 10^{-3}$), ενώ όλοι οι άλλοι όροι είναι της τάξης του 10^{-6} ή 10^{-5}. Για το λόγο αυτό δικαιολογείται το να χρησιμοποιηθεί βασικά μια κεπλέρια τροχιά με μικρές μεταβολές. Η μέθοδος αυτή είναι γνωστή ως μέθοδος των παρέλξεων.

Ο όρος J_{20}, δηλαδή ή ύπαρξη της επιπλατύνσεως της γης έχει ως κύριο αποτέλεσμα να περιστρέφεται το επίπεδο της τροχιάς γύρω από τον άξονα Z με μια γωνιακή ταχύτητα που δίνεται σε πρώτη προσέγγιση από τη σχέση:

$$\dot{\Omega} = -\frac{3}{2} J_{20} \cdot n \left(\frac{a_{\oplus}}{p} \right)^2 \cos i + ... \qquad 2.14$$

όπου $p = a\left(1 - e^2\right)$

Επομένως η γωνία Ω δεν είναι σταθερή αλλά δίνεται από τη σχέση:

$$\Omega = \Omega_0 + \dot{\Omega}\left(T - T_0\right) \qquad 2.15$$

όπου Ω_0 η τιμή που είχε στο χρόνο T_0. Για τους συνηθισμένους δορυφόρους η $\dot{\Omega}$ είναι μερικές μοίρες την ημέρα.

Ένα δεύτερο αποτέλεσμα από την ύπαρξη του όρου J_{20} είναι να περιστρέφεται και η έλλειψη στο επίπεδό της γύρω από το κέντρο της γης με μια γωνιακή ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση:

$$\dot{\omega} = -\frac{3}{2} J_{20} \cdot n \cdot \left(\frac{a_{\oplus}}{p} \right)^2 \left(2 - \frac{5}{2} \sin^2 i \right) + ... \qquad 2.16$$

και επομένως και η γωνία της τροχιάς δεν μένει σταθερή αλλά δίνεται από τη σχέση:

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega}\left(T - T_0\right) \qquad 2.17$$

Τέλος η ύπαρξη του όρου J_{20} έχει ως αποτέλεσμα να μεταβάλλει την σχέση που συνδέει τα a και n σε:

$$a^3 n^2 = GM\left(1 - \frac{3}{2} J_{20}\left(\frac{a_\oplus}{p}\right)^2 \left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1-e^2} + ...\right) \qquad 2.18$$

Ο όρος J_{20} έχει και άλλες μικρότερες επιδράσεις καθώς και όλοι οι υπόλοιποι όροι J_{nm} με αποτέλεσμα να μετακινούν τον δορυφόρο κατά μερικές εκατοντάδες μέτρα. Οι σχέσεις αυτές είναι βεβαίως αρκετά πολύπλοκες.

Ένα άλλο φαινόμενο, που επηρεάζει σημαντικά την κίνηση κυρίως των χαμηλών δορυφόρων, είναι η τριβή τους στην ατμόσφαιρα. Αυτό εξαρτάται από την πυκνότητα της ατμόσφαιρας στη θέση του δορυφόρου, τη μάζα του και την ενεργό επιφάνειά του στην διεύθυνση της κίνησής του. Το πρόβλημα γίνεται ιδιαίτερα δύσκολο επειδή η πυκνότητα της ατμόσφαιρας μεταβάλλεται συνεχώς και τυχαία, ανάλογα με την ηλιακή δράση και δεν είναι εύκολη η πρόβλεψη.

Το αποτέλεσμα από την ύπαρξη της τριβής είναι ο δορυφόρος να χάνει συνεχώς ύψος, να επιταχύνεται και να πλησιάζει περισσότερο τη γη και τα ακόμα πυκνότερα στρώματα της ατμόσφαιρας. Αυτό σημαίνει ότι η ίδια κίνηση n δεν θα είναι σταθερή, αλλά θα αυξάνει συνεχώς σε πρώτη προσέγγιση γραμμικά με το χρόνο, δηλαδή:

$$n = n_0 + \dot{n}\left(T - T_0\right) \qquad 2.19$$

Αποτέλεσμα της τριβής είναι η αλλαγή του σχήματος και της διάστασης ? της τροχιάς στο επίπεδο της και επομένως η μέση ανωμαλία M που είναι το ολοκλήρωμα του n θα δίνεται όχι πια από μια σχέση πρώτου βαθμού αλλά δευτέρου δηλαδή:

$$M = M_0 + n_0\left(T - T_0\right) + \frac{1}{2}\dot{n}\left(T - T_0\right)^2 \qquad 2.20$$

Γενικά η τροχιά ενός δορυφόρου θα εκφράζεται με περισσότερα από έξη στοιχεία και θα συνδέονται με μια στιγμιαία κεπλέρια τροχιά που θα δίνεται από τις γενικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}
\Omega &= \Omega_0 + \Omega_1\left(T - T_0\right) + \Omega_2\left(T - T_0\right)^2 + \ldots..\\
\omega &= \omega_0 + \omega_1\left(T - T_0\right) + \omega_2\left(T - T_0\right)^2 + \ldots\ldots.\\
i &= i_0 + i_1\left(T - T_0\right) + \ldots\ldots \qquad 2.21\\
e &= e_0 + e_1\left(T - T_0\right) + \ldots..\\
M &= M_0 + M_1\left(T - T_0\right) + M_2\left(T - T_0\right)^2 + \ldots\ldots
\end{aligned}$$

Απο τις σχέσεις αυτές που δίνουν την

$$n = M_1 + 2M_2\left(T - T_0\right) \qquad 2.22$$

και φυσικά την:

$$a^3 n^2 = GM\left(1 - \frac{3}{2}J_{20}\left(\frac{a_\oplus}{p}\right)^2\left(1 - \frac{3}{2}\sin^2 i\right)\sqrt{1 - e^2} + \ldots..\right) \qquad 2.18$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τις συντεταγμένες του δορυφόρου την χρονική στιγμή T σύμφωνα με τα προηγούμενα.

2.4. Υπολογισμός των εφημερίδων και των τροχιών

Ο υπολογισμός των εφημερίδων ενός δορυφόρου μπορεί να γίνει αναλυτικά αν είναι γνωστά τα στοιχεία της τροχιάς του. Κατά κανόνα χρησιμοποιείται μια μεταβαλλόμενη κεπλέρια τροχιά με σχέσεις όπως αυτές που δόθηκαν προηγούμενα. Για να δοθεί όμως η θέση του δορυφόρου με ακρίβεια εκατοστών χρειάζονται πάρα πολλοί όροι και κάτι τέτοιο μόνο σε ηλεκτρονικό υπολογιστή μπορεί να γίνει. Για ακρίβεια όμως της τάξης των μερικών εκατοντάδων μέτρων, που είναι ικανοποιητική για την προετοιμασία προβλέψεων για παρατηρήσεις ακρίβειας, είναι αρκετό να χρησιμοποιήσουμε τους κύριους μόνο όρους. Πάντως πρέπει να σημειωθεί ότι η ακρίβεια των υπολογισμών χειροτερεύει όσο μεγαλώνει το χρονικό διάστημα για το οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε τη θέση του δορυφόρου.

Οι εφημερίδες είναι δυνατόν να υπολογιστούν και με αριθμητική ολοκλήρωση των διαφορικών εξισώσεων της κίνησης του δορυφόρου. Η μέθοδος αυτή χρησιμοποιείται σε μεγάλα κέντρα που διαθέτουν πολύ μεγάλους ηλεκτρονικούς υπολογιστές.

Ο υπολογισμός των στοιχείων των τροχιών (π.χ. στην απλή περίπτωση της κεπλέριας τροχιάς τα στοιχεία $\Omega, \omega, i, e, n, M_0$ για χρόνο T_0) γίνεται με αντίστροφη λύση του προβλήματος του υπολογισμού των εφημερίδων. Εδώ έχουμε από παρατηρήσεις πληροφορίες για τη θέση του δορυφόρου σε διάφορες χρονικές στιγμές (αλλά κατά κανόνα όχι την ίδια θέση) και ζητάμε να βρούμε την τροχιά εκείνη που ικανοποιεί τις παρατηρήσεις μας.

Συνήθως έχουμε πολύ περισσότερες παρατηρήσεις από τις απαιτούμενες και χρησιμοποιούμε τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων για μια συνόρθωση. Χρησιμοποιείται αποκλειστικά η μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων και όπως οι εξισώσεις παρατήρησης δεν είναι γραμμικές ως προς τους αγνώστους πρέπει να γίνει γραμμικοποίηση με ανάπτυγμα σε σειρά Taylor. Οι εκφράσεις για τις μερικές παραγώγους είναι συχνά αρκετά πολύπλοκες σχέσεις και έτσι αν η μέθοδος του υπολογισμού είναι αριθμητική αντί για αναλυτική, συχνά οι μερικές παράγωγοι υπολογίζονται και αυτές αριθμητικά. Η μέθοδος βέβαια αυτή είναι πολύ χρονοβόρα, αλλά είναι κατ΄αρχή απλή και δεν απαιτεί παρά λίγους αλγόριθμους, που όμως επαναλαμβάνονται συνεχώς.

Ο υπολογισμός των τροχιών είναι ένα ιδιαίτερα σύνθετο, πολύπλοκο και δύσκολο πρόβλημα και σε λίγα μόνο κέντρα στον κόσμο γίνονται υπό μορφή ρουτίνας υπολογισμοί τροχιών.

Ο υπολογισμός των τροχιών των δορυφόρων μπορεί να γίνει (και γίνεται) και με καθαρά αριθμητικές μεθόδους, που στηρίζεται στην αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς.

3.0 Η τροχιά των δορυφόρων GPS (εφημερίδες)

3.1 Γενικά

Οι χρήστες του συστήματος GPS, για να υπολογίσουν τη θέση τους χρειάζονται δεδομένα, που περιέχονται στο εκπεμπόμενο από τους δορυφόρους μήνυμα ναυσιπλοίας, το οποίο διαμορφώνεται σε δυαδική μορφή δεδομένων πάνω στις φέρουσες συχνότητες.

Τα δεδομένα περιλαμβάνουν πληροφορία για την λειτουργία του δορυφόρου (health status), πληροφορία χρόνου για τη μεταφορά της παρακολούθησης του σήματος από τον κώδικα C/A στον κώδικα P, τις παραμέτρους για τον υπολογισμό της διόρθωσης του χρονόμετρου του, τα τροχιακά στοιχεία του δορυφόρου και τις διορθώσεις για την καθυστέρηση της διάδοσης του σήματος λόγω ιονόσφαιρας. Επιπλέον περιέχει πληροφορία για τις λιγότερο ακριβείς τροχιές και την κατάσταση λειτουργίας όλων των υπόλοιπων δορυφόρων στο σχηματισμό (almanac), που χρειάζεται για τον προγραμματισμό της παρακολούθησης και των άλλων δορυφόρων, ενώ έχει προβλεφθεί χώρος για τη διαμόρφωση και εκπομπή ειδικών μηνυμάτων.

Κάθε δορυφόρος εκπέμπει το μήνυμά του κάθε 30 sec. Αυτό το μήνυμα αποκωδικοποιείται (από τον δέκτη) και μετατρέπεται σε θέση (και ταχύτητα) για τον δορυφόρο για οποιαδήποτε χρονική στιγμή.

Οι εφημερίδες των δορυφόρων προσδιορίζονται από το τμήμα ελέγχου στο έδαφος, με παρατηρήσεις στους δορυφόρους από ένα δίκτυο σταθμών παρακολούθησης γνωστών γήϊνων συντεταγμένων.

Οι τροχιές που υπολογίζονται προεκτείνονται στο μέλλον, κωδικοποιούνται και φορτώνονται στη μνήμη των δορυφόρων κάθε 26 ώρες.

3.2 Ο υπολογισμός της εκπεμπόμενης εφημερίδας

Η εκπεμπόμενη εφημερίδια είναι η τροχιά κάθε δορυφόρου που περιέχεται στο μήνυμα που εκπέμπεται. Η διαδικασία του υπολογισμού της είναι (Russel and Schaibly, 1980).

1. Μια τροχιά αναφοράς παράγεται για κάθε δορυφόρο GPS, από δεδομένα που έχουν αποκτηθεί στο “άμεσο παρελθόν” και προεκτείνεται στο μέλλον.

2. Τα προβλεπόμενα τροχιακά στοιχεία χρησιμοποιούνται σαν αρχικές συνθήκες (τιμές) με ένα εκτιμητή Kalman, ώστε να υπολογισθούν για τις χρονικές στιγμές που απαιτείται θέσεις και ταχύτητες του δορυφόρου. Πιό αναλυτικά, στο τέλος κάθε μέρας οι παρατηρήσεις GPS από τους σταθμούς παρακολούθησης χρησιμοποιούνται για την ενημέρωση του αντίστοιχου τμήματος της τροχιάς αναφοράς. Σ’ αυτό το σημείο τα υπολογιζόμενα τροχιακά στοιχεία των δορυφόρων αντιστοιχούν στο τέλος της κάθε ημέρας.

3. Από τα τελευταία υπολογισμένα τροχιακά στοιχεία γίνεται ξανά επέκταση στο μέλλον για 14 ημέρες.

4. Η πληροφορία για τις τροχιές που εκπέμπεται στο μήνυμα ναυσιπλοίας βασίζεται σε προσαρμογή με καμπύλες στις προβλεπόμενες εφημερίδες για 4 μέχρι 6 ώρες.

5. Αυτά τα μικρά τόξα (των 4 ή 6 ωρών) μετατρέπονται από αδρανειακές καρτεσιανές συντεταγμένες σε κεπλέρια στοιχεία, που μεταδίδονται και αποθηκεύονται στην μνήμη κάθε δορυφόρου. Κάθε ώρα νέα στοιχεία μεταδίδονται (από τον δορυφόρο), αντικαθιστώντας τα παλαιότερα στοιχεία.

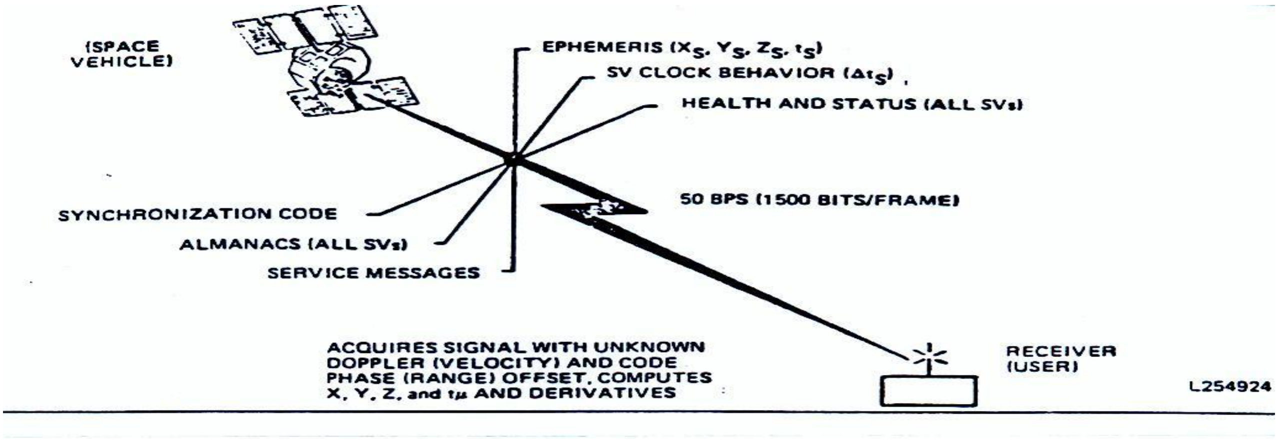
6. Η ενημέρωση είναι (μέχρι σήμερα) ημερήσια. Συνήθως λοιπόν δεν χρησιμοποιούνται τα δεδομένα από την δεύτερη μέχρι την 14η μέρα, εκτός αν δεν είναι δυνατή (για τεχνικούς λόγους), νέα ενημέρωση του δορυφόρου από το έδαφος.

7. Επειδή οι μετρήσεις κάθε ημέρας χρησιμοποιούνται σε συνδυασμό με την τροχιά αναφοράς, για την πρόβλεψη της τροχιάς κάθε ημέρας, η ακρίβεια της εφημερίδας μειώνεται σαν συνάρτηση του χρόνου από την ώρα της ενημέρωσης (αρχή της ημέρας) και σαν συνάρτηση της παλαιότητας της τροχιάς αναφοράς (από την αρχή της εβδομάδας).

8. Αν και η ακρίβεια της εφημερίδας επίσημα δίνεται σαν καλύτερη από 10m, σε αρκετές περιπτώσεις η ακρίβεια της παρουσιάζεται αρκετά χειρότερη.

3.3 Περιεχόμενο και δομή του μηνύματος ναυσιπλοίας

Το μήνυμα ναυσιπλοίας περιέχει τα δεδομένα, που χρειάζεται ένας δέκτης για να λειτουργήσει και για να υπολογίσει την θέση του με την βοήθεια του συστήματος GPS (σχ. 3).



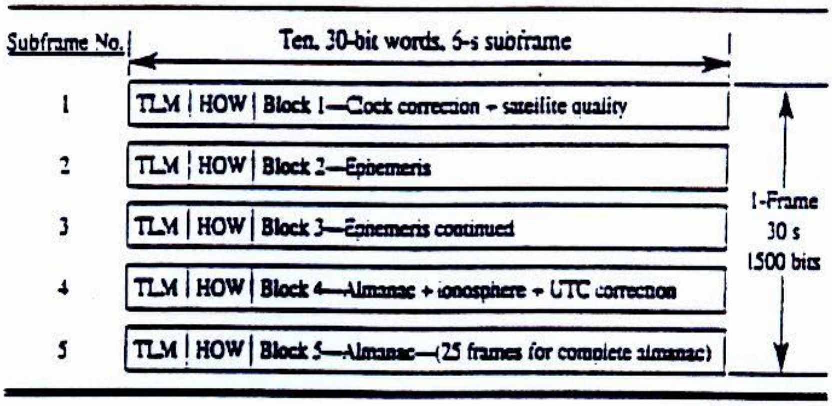
Σχήμα 5

Τα δεδομένα περιλαμβάνουν πληροφορία για την λειτουργία του δορυφόρου, πληροφορία χρόνου, πληροφορία χρόνου για την μεταφορά της παρακολούθησης από τον κώδικα C/A στον κώδικα P, τις παραμέτρους για τον υπολογισμό της διόρθωσης του χρονομέτρου του δορυφόρου, την τροχιά του δορυφόρου και τις διορθώσεις για τον υπολογισμό της καθυστέρησης λόγω ιονόσφαιρας. Επιπλέον υπάρχει πληροφορία για τις προσεγγιστικές τροχιές όλων των υπολοίπων δορυφόρων που λειτουργούν, ενώ υπάρχει και χώρος για ειδικά μηνύματα.

Το μήνυμα (Van Dierendonck et al, 1980) αποτελείται από 5 τμήματα των 6 sec, δηλαδή διαρκεί 30 sec ή 1500 bits (σχ. 6).

Parameter	C/A Signal	P Signal
Code clock (chip) rate	1.023 Mbps	10.23 Mbps
Code period	1023	$\approx 6 \times 10^{12}$; 1 week
Data rate	50 bps	50 bps
Transmission frequency	L_1	L_1, L_2

Data format—frame and subframe structure



Σχήμα 6

Τα δεδομένα εκπέμπονται με ρυθμό 50 bits/sec και είναι κοινά και στον P και στον κώδικα C/A και στις δύο συχνότητες L1 και L2.

1. Το πρώτο τμήμα (Data Block 1) περιέχει τις παραμέτρους διόρθωσης του χρονομέτρου και της ιονοσφαιρικής διάθλασης, όπως υπολογίζονται στο τμήμα ελέγχου.

2. Το δεύτερο και τρίτο τμήμα (Data Block 2) περιέχουν την εφημερίδα του δορυφόρου.

3. Το τέταρτο τμήμα περιέχει αλφαριθμητική πληροφορία για τους χρήστες (Message Block).

4. Το πέμπτο τμήμα (Data Block 3) περιέχει πληροφορίες για προσεγγιστική τροχιά, διόρθωση χρονομέτρων και κατάσταση λειτουργίας για κάθε δορυφόρο (ένα τμήμα για κάθε δορυφόρο).

Ολόκληρο το τμήμα των δεδομένων επαναλαμβάνεται κάθε 30 sec, εκτός από το Block 3, που αλλάζει περιστροφικά (σειριακά) 25 φορές (γιατί κάθε τμήμα περιέχει δεδομένα για ένα δορυφόρο).

Κάθε μια ώρα ονομαστικά ανανεώνεται η πληροφορία στα Block 1 και 2. Τα Block 3 και Message Block ανανεώνονται μόνο μετά από νέα ενημέρωση από το έδαφος.

Κάθε τμήμα των δεδομένων αρχίζει με μια λέξη τηλεμετρίας (TLM) και την λέξη HOW, που παράγονται σε κάθε ένα δορυφόρο. Η λέξη TLM (Telemetry Word) περιλαμβάνει μήνυμα για την ενημέρωση των τροχιακών στοιχείων (πχ αν βρίσκεται εκείνη τη στιγμή σε εξέλιξη) και άλλα διαγνωστικά μηνύματα.

Η λέξη HOW (Handover Word - λέξη μεταφοράς) περιλαμβάνει τον μετρητή Z (Z- Count Word) και την πληροφορία της μεταφοράς από τον κώδικα C/A στον κώδικα P.

Οι παράμετροι της τροχιάς δίνονται σαν κεπλέρια στοιχεία μαζί με τις παρέλξεις, ως προς τον χρόνο αναφοράς της εφημερίδας t_{oe}, ονομαστικά στο κέντρο του χρόνου μετάδοσης.

Ο χρόνος του συστήματος GPS, όπως βγαίνει από την αποκωδικοποίηση των σημάτων, και η παράμετρος t_{oe} μετρούνται σε δευτερόλεπτα (sec) από την αρχή της εβδομάδας (Σάββατο/Κυριακή τα μεσάνυχτα).

Τα κεπλέρια στοιχεία συμπληρώνονται με τις παρακάτω μεταβλητές για τον υπολογισμό και των παρέλξεων.

α) Δn η αλλαγή στη μέση ανωμαλία
β) $\dot{\Omega}$ η μετατόπιση (ταχύτητα) του ανιόντος δεσμού
γ) c_{uc}, c_{us}, c_{rc}, c_{rs}, c_{ic}, c_{is} τα εύρη για τις αρμονικές διορθώσεις (στο cos και sin)

στον εφαπτομενικό όρο της τροχιάς, στον ακτινικό και την κλίση της.

Η εφημερίδα δίνεται με τη μορφή κεπλέριων στοιχείων, ενώ τα περιοδικά φαινόμενα με την μορφή διορθώσεων πάνω στα κεπλέρια στοιχεία. Τα στοιχεία αυτά θεωρούνται ακριβή για ένα διάστημα μιας ώρας από το χρόνο στον οποίο αναφέρονται, ενώ θεωρούνται επαρκούς ακρίβειας και για την επόμενη μισή ώρα.

Συνολικά 16 παράμετροι περιγράφουν τα κεπλέρια στοιχεία και τις παρέλξεις στην εφημερίδα. Επειδή τα κεπλέρια στοιχεία μεταβάλλονται συνεχώς, μία απαραίτητη παράμετρος για τον προσδιορισμό της τροχιάς, είναι ο χρόνος, που δίνεται στην ποσότητα t_{oe} (time of ephemeris) εκφρασμένη σε δευτερόλεπτα από την αρχή της εβδομάδας.

Η τροχιά του δορυφόρου περιγράφεται από τις εξής παραμέτρους (Van Dierendonck, 1980):

M_0	Μέση ανωμαλία στο χρόνο αναφοράς
Δ_n	Αλλαγή στη μέση κίνηση του δορυφόρου από την υπολογισμένη τιμή
e	Εκκεντρότητα της ελλειπτικής τροχιάς
$\sqrt{A}$	Τετραγωνική ρίζα του μεγάλου ημιάξονα
Ω_o	Ορθή αναφορά ανιώντος δεσμού στο χρόνο αναφοράς
i_o	Κλίση στο χρόνο αναφοράς
ω	Στοιχείο περιγείου
$\dot{\Omega}$	Γωνιακή ταχύτητα μετατόπισης του ανιόντος δεσμού
c_{uc}	Πλάτος αρμονικής διόρθωσης στο (cos) του εφαπτομενικού όρου της τροχιάς
c_{us}	Πλάτος αρμονικής διόρθωσης στο (sin) του εφαπτομενικού όρου της τροχιάς
c_{rc}	Πλάτος αρμονικής διόρθωσης στο (cos) του ακτινικού όρου της τροχιάς
c_{rs}	Πλάτος αρμονικής διόρθωσης στο (sin) του ακτινικού όρου της τροχιάς
c_{ic}	Πλάτος αρμονικής διόρθωσης στο (cos) της κλίσης της τροχιάς
c_{is}	Πλάτος αρμονικής διόρθωσης στο (sin) της κλίσης της τροχιάς
t_{oe}	Χρόνος αναφοράς της εφημερίδας
IODE	Εποχή αναφοράς των δεδομένων της εφημερίδας

Η θέση του κάθε δορυφόρου, που παρακολουθείται από το δέκτη, μπορεί να υπολογιστεί στο γεωκεντρικό γήϊνο σύστημα αναφοράς WGS΄84 χρησιμοποιώντας τις 16 παράμετρους της τροχιάς και τις παρακάτω εξισώσεις (Van Dierendonck et al, 1980).

$$E_k = \cos^{-1}\left\{\frac{e+\cos v_k}{1+e\cdot\cos v_k}\right\} \qquad 3.0$$

$$\mu = 3.986004418\cdot 10^{14} m^3/\sec^2 \qquad 3.\ \mathrm{I}$$

$$\dot{\Omega}_e = 7.2921151467\cdot 10^{-5} rad/\sec \qquad 3.\ \mathrm{II}$$

$$A = \left(\sqrt{A}\right)^2 \qquad 3.1$$

$$n_0 = \sqrt{\frac{\mu}{A^3}} \qquad 3.2$$

$$t_k = t - t_{oe} \qquad 3.3$$

$$n = n_0 + \Delta n \qquad 3.4$$

$$M_k = M_0 + n \cdot t_k \qquad 3.5$$

$$M_k = E_k - e \cdot \sin E_k \qquad 3.6$$

$$v_k = \tan^{-1}\left\{\frac{\sin v_k}{\cos v_k}\right\} = \tan^{-1}\left\{\frac{(\sqrt{1-e^2} \cdot \sin E_k)/(1-e \cdot \cos E_k)}{(\cos E_k - e)/(1-e \cdot \cos E_k)}\right\} \qquad 3.7$$

$$\Phi_k = v_k + \omega \qquad 3.8$$

$$\begin{aligned} \delta u_k &= c_{us} \cdot \sin 2\Phi_k + c_{uc} \cdot \cos 2\Phi_k \\ \delta r_k &= c_{rc} \cdot \cos 2\Phi_k + c_{rs} \cdot \sin 2\Phi_k \\ \delta i_k &= c_{ic} \cdot \cos 2\Phi_k + c_{is} \cdot \sin 2\Phi_k \end{aligned} \qquad 3.11$$

$$\begin{aligned} r_k &= A(1 - e \cdot \cos E_k) + \delta r_k \\ u_k &= \Phi_k + \delta u_k \\ i_k &= i_0 + \delta i_k + (IDOT)t_k \end{aligned} \qquad 3.10$$

$$\begin{aligned} x'_k &= r_k \cdot \cos u_k \\ y'_k &= r_k \cdot \sin u_k \end{aligned} \qquad 3.11$$

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e) t_k - \dot{\Omega}_e \cdot t_{oe} \qquad 3.12$$

$$\begin{aligned} x_k &= x'_k \cdot \cos \Omega_k - y'_k \cdot \cos i_k \cdot \sin \Omega_k \\ y_k &= x'_k \cdot \sin \Omega_k + y'_k \cdot \cos i_k \cdot \cos \Omega_k \\ z_k &= y'_k \cdot \sin i_k \end{aligned} \qquad 3.13$$

(I) Παγκόσμια σταθερά του πεδίου βαρύτητας της γής (σύστημα αναφοράς WGS84)

(II) Ταχύτητα περιστροφής της γής (σύστημα αναφοράς WGS84)

(1) Μεγάλος ημιάξονας της τροχιάς

(2) Υπολογισμένη μέση κίνηση του δορυφόρου

(3) Χρόνος απο την εποχή αναφοράς της εφημερίδας, χρόνος του συστήματος GPS κατά την ώρα της εκπομπής, δηλαδή διορθωμένος για τον χρόνο διαδρομής (απόσταση / ταχύτητα του φωτός). Επιπλέον το t_k πρέπει να είναι η συνολική χρονική διαφορά μεταξύ του χρόνου t και της εποχής t_{oe} λαμβάνοντας υπόψη την αρχή ή το τέλος της εβδομάδας. Ετσι αν το t_k είναι μεγαλύτερο απο 302400 sec πρέπει να αφαιρεθούν 604800 sec απο το t_k. Αν το t_k είναι μικρότερο απο -302400 sec τότε πρέπει να προστεθούν 604800 sec στο t_k.

(4) Διορθωμένη μέση κίνηση

(5) Μέση Ανωμαλία

(6) Εξίσωση του Kepler για την έκκεντρη ανωμαλία (λύνεται με επαναλήψεις)

(7) Αληθής Ανωμαλία

(8) Εκκεντρη Ανωμαλία (χρησιμοποιείται για έλεγχο)

(9) Στοιχείο (γωνία) του πλάτους

(10) Διόρθωση στο στοιχείο του πλάτους (λόγω παρέλξεων)

(11) Διόρθωση στην ακτίνα (λόγω παρέλξεων)

(12) Διόρθωση στην κλίση (λόγω παρέλξεων)

(13) Διορθωμένο στοιχείο του πλάτους

(14) Διορθωμένη ακτίνα

(15) Διορθωμένη κλίση

(16) Συντεταγμένη x του δορυφόρου στο τροχιακό επίπεδο

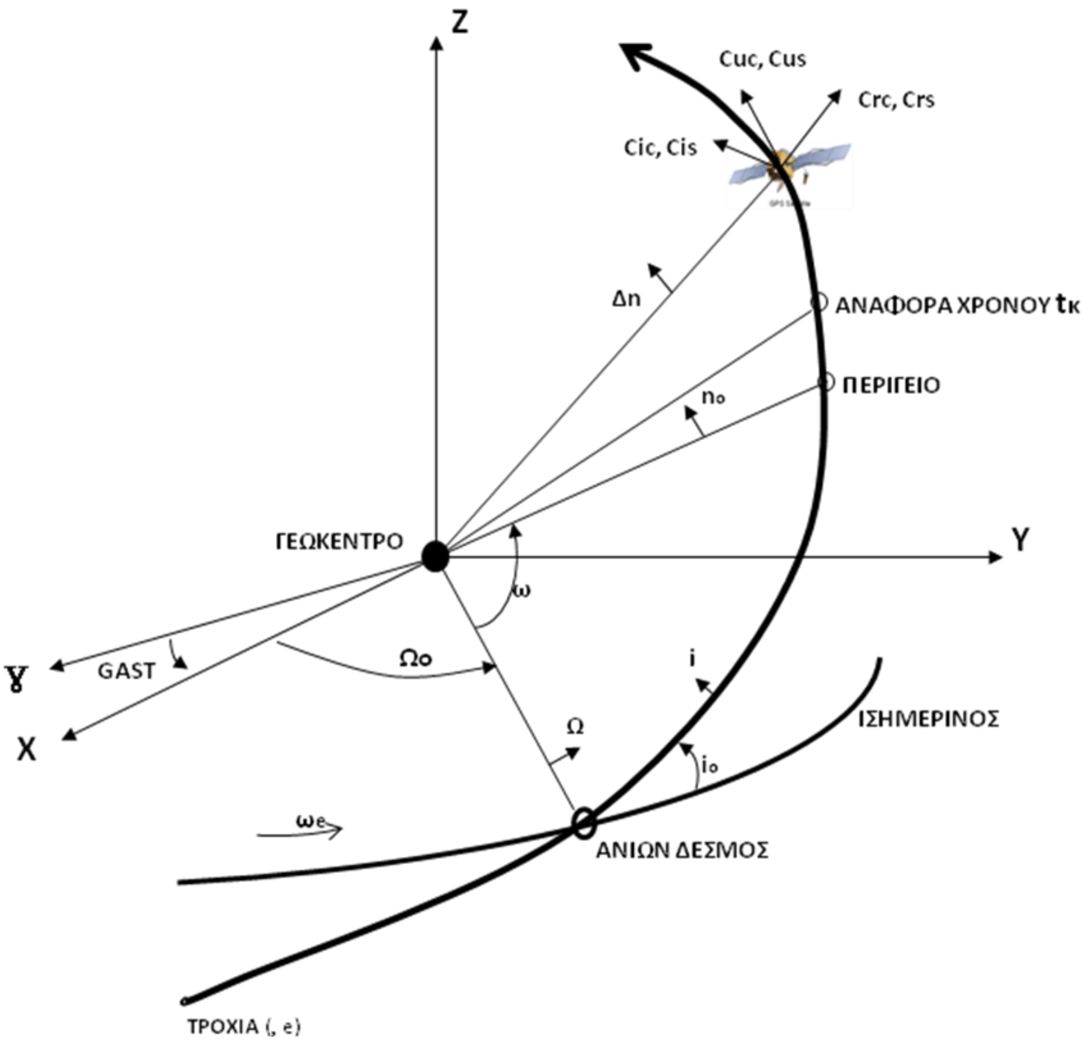
(17) Συντεταγμένη y του δορυφόρου στο τροχιακό επίπεδο

(18) Διορθωμένο μήκος του ανιόντος δεσμού

(19) Συντεταγμένη x του δορυφόρου στο WGS84

(20) Συντεταγμένη y του δορυφόρου στο WGS84

(21) Συντεταγμένη z του δορυφόρου στο WGS84



Σχήμα 7

Αν υποτεθεί οτι η κίνηση του δορυφόρου γίνεται μόνο στο τροχιακό του επίπεδο $z'_k = 0$ τότε οι σχέσεις (16), (17) μπορούν να συμπληρωθούν ως εξής:

$$
\begin{aligned}
x'_k &= r_k \cos u_k \\
y'_k &= r_k \sin u_k \qquad (3.14) \\
z'_k &= 0
\end{aligned}
$$

Αν παραγωγίσουμε τις σχέσεις αυτές ως προς τον χρόνο, τότε θα προσδιορίσουμε την ταχύτητα του δορυφόρου στο τροχιακό του επίπεδο και θα είναι:

$$\dot{x}_k' = -\sin u_k \frac{nA}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$\dot{y}_k' = \left(e + \cos u_k\right) \frac{nA}{\sqrt{1-e^2}} \qquad 3.15$$

$$\dot{z}_k' = 0$$

Όπου το n δίνεται απο την σχέση 3.2.

Στρέφοντας δε τις σχέσεις 3.15 με τον ίδιο πίνακα στροφής, όπως τις σχέσεις 3.13 θα υπολογίσουμε την ταχύτητα του δορυφόρου, στο σύστημα αναφοράς WGS84 ως εξής:

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k' \cos\Omega_k - \dot{y}_k' \cos i_k \sin\Omega_k$$

$$\dot{y}_k = \dot{x}_k' \sin\Omega_k + \dot{y}_k' \cos i_k \cos\Omega_k \qquad 3.16$$

$$\dot{z}_k = \dot{y}_k' \sin i_k$$

Βιβλιογραφία

Gold R., (1967): "Optimal Binary Sequences for Spread Spectrum Multiplexing", IEEE Transactions on Information Theory, 619-621.

Leick A., (1994): "GPS satellite Surveying". 2nd edition, Wiley.

Milliken R., C. Zoller, (1980): "Principle of Operation of NAVSTAR and System Characteristics", Global Positioning System papers published in Navigation, Vol I, 1980.

Russell S., J. Schaibly, (1980): "Control Segment and User Performance", Global Positioning System papers published in Navigation, Vol I, 1980.

Spilker J., (1980): "GPS Signal Structure and Performance Characteristics", Global Positioning System papers published in Navigation, Vol I, 1980.

Van Dierendonck A, S. Russell, E. Kopitzke, M. Birnbaum, (1980): "The GPS Navigation Message", Global Positioning System papers published in Navigation, Vol I, 1980.

Βέης Γ., (1990): "Σημειώσεις Δορυφορικής Γεωδαισίας". ΚΔΔ, ΕΜΠ.