

Φίλτρο Kalman

Περιγραφή

Μοντέλο μετρήσεων:

$$\mathbf{v}_k + B_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{b}_k$$

με $k = 0, 1, 2, \dots$

Δυναμικό μοντέλο:

$$\mathbf{x}_k = T\mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{u}$$

όπου

- \mathbf{x}_k το διάνυσμα «κατάστασης» (*state vector*), δηλ. οι παράμετροι που ενδιαφέρουν, τη χρονική στιγμή t_k ,
- \mathbf{v}_k το διάνυσμα υπολοίπων των μετρήσεων,
- B_k ο πίνακας σχεδιασμού,
- \mathbf{b}_k το διάνυσμα των σταθερών όρων των μετρήσεων,
- T ο πίνακας «μετάβασης» (*transition matrix*), και
- \mathbf{u} το διάνυσμα υπολοίπων του δυναμικού μοντέλου· $\mathbf{u} = H\mathbf{w}$, όπου \mathbf{w} είναι το διάνυσμα του «θορύβου» του δυναμικού μοντέλου και H είναι πίνακας συντελεστών.

Οι πίνακες μεταβλητότητας συμμεταβλητότητας Q_{x_k} , Q_v και $Q_u (= HQ_u H^T)$ εκφράζουν τις αβεβαιότητες του διανύσματος κατάστασης, των μετρήσεων και του δυναμικού μοντέλου αντίστοιχα.

Διαδικασία υπολογισμού

Αρχική κατάσταση \mathbf{x}_{k-1} και πίνακας μεταβλητότητας -- συμμεταβλητότητας $Q_{x_{k-1}}$

1. Πρόβλεψη:

$$\mathbf{x}'_k = T\mathbf{x}_{k-1}$$

και

$$Q'_{x_k} = TQ_{x_{k-1}}T^T + Q_u$$

2. Πίνακας «κέρδους» (*gain matrix*):

$$K_k = Q'_{x_k} B_k^T (Q_v + B_k Q'_{x_k} B_k^T)^{-1}$$

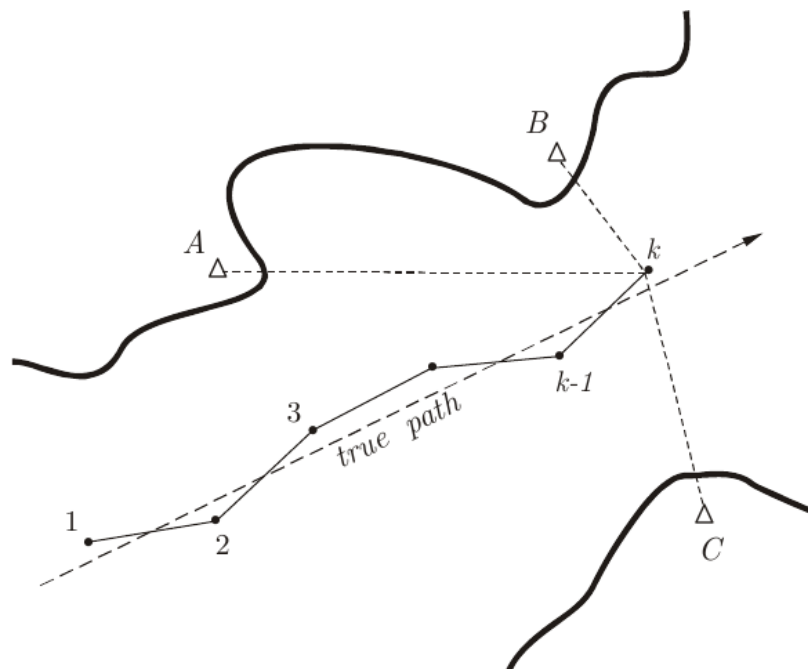
3. Ενημέρωση:

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}'_k + K_k (\mathbf{b}_k - B_k \mathbf{x}'_k)$$

και

$$Q_{x_k} = (I - K_k B_k) Q'_{x_k}$$

Παράδειγμα



Ένα πλοίο κινείται με σταθερή ταχύτητα (κατά μέτρο και διεύθυνση). Ανά τακτά χρονικά διαστήματα (πχ. 60s) γίνονται μετρήσεις αποστάσεων προς ραδιοφάρους γνωστής θέσης που βρίσκονται στην περιοχή (A, B, C). Από τις μετρήσεις προσδιορίζεται η θέση του σκάφους τη στιγμή των μετρήσεων. Οι διαδοχικές θέσεις των μετρήσεων απεικονίζονται με τη συνεχή γραμμή στο παραπάνω σχήμα, ενώ η «αληθής» πορεία του πλοίου εμφανίζεται ως διακεκομμένη.

Διάγραμμα κατάστασης

Το διάγραμμα κατάστασης για το παραπάνω πρόβλημα θα περιλαμβάνει τη θέση και την ταχύτητα του σκάφους, δηλ.

$$\mathbf{x}_k = [x_k, y_k, \dot{x}_k, \dot{y}_k]^T$$

Μοντέλο μετρήσεων (πρωτεύον μοντέλο)

Το μοντέλο των μετρήσεων θα δίνεται από την σχέση

$$\mathbf{l}_k + \mathbf{v}_k = \hat{\mathbf{l}}_k$$

όπου

- \mathbf{l}_k είναι το διάνυσμα των μετρήσεων
- \mathbf{v}_k είναι το διάνυσμα των υπολοίπων των μετρήσεων, και
- $\hat{\mathbf{l}}_k$ είναι οι εκτιμήσεις για τις καλύτερες τιμές των μετρημένων μεγεθών

Οι καλύτερες τιμές των μετρημένων μεγεθών ($\hat{\mathbf{l}}_k$) συνδέονται με μη γραμμικές σχέσεις με τις θέσεις του σκάφους (\hat{x}_k, \hat{y}_k) και των ραδιοφάρων (x_j, y_j), για $j = A, B, C$, τη χρονική στιγμή t_k

$$\hat{l}_j = \sqrt{(\hat{x}_k - x_j)^2 + (\hat{y}_k - y_j)^2}$$

Γραμμικοποιώντας την παραπάνω σχέση (ο εκθέτης $'$ δηλώνει προσεγγιστικές τιμές) και αντικαθιστώντας στην εξίσωση του μοντέλου, προκύπτει

$$v_j - l'_k - \frac{x'_k - x_j}{l'_k} (\hat{x}_k - x'_k) - \frac{y'_k - y_j}{l'_k} (\hat{y}_k - y'_k) = -l_j$$

ή

$$v_j - \frac{x'_k - x_j}{l'_k} \hat{x}_k - \frac{y'_k - y_j}{l'_k} \hat{y}_k = l'_k - l_j + \left(-\frac{x'_k - x_j}{l'_k} x'_k - \frac{y'_k - y_j}{l'_k} y'_k \right)$$

Σε διανυσματική μορφή η παραπάνω σχέση θα είναι

$$\mathbf{v}_k + \mathbf{B}_k \hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{l}'_k - \mathbf{l}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{x}'_k (= \mathbf{b}_k)$$

όπου η κάθε γραμμή του πίνακα σχεδιασμού (\mathbf{B}_k) θα είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} -\frac{x'_k - x_j}{l'_k} & -\frac{y'_k - y_j}{l'_k} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Συνδιάζοντας την σχέση αυτή με την εξίσωση για την ενημέρωση του διανύσματος κατάστασης (δες βήμα 3 της διαδικασίας υπολογισμού) έχουμε

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}'_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{l}'_k - \mathbf{l}_k + \mathbf{B}_k \mathbf{x}'_k - \mathbf{B}_k \mathbf{x}'_k)$$

ή

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \mathbf{x}'_k + \mathbf{K}_k (\mathbf{l}'_k - \mathbf{l}_k)$$

Δυναμικό (δευτερεύων) μοντέλο

Για την ανάπτυξη του δυναμικού μοντέλου θεωρούμε ότι η κίνηση του σκάφους διέπεται από τις αρχές της **ευθύγραμμης ομαλής κίνησης**, που περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$z(t) = z(t_k) + (t - t_k) \dot{z}(t_k)$$

Ο θόρυβος του δυναμικού μοντέλου (το διάνυσμα \mathbf{w}) μπορεί να θεωρηθεί ότι προέρχεται από **επιταχύνσεις** που δεν έχουν μοντελοποιηθεί (δηλαδή δεν συμπεριλαμβάνονται στο διάνυσμα κατάστασης). Έτσι, η κίνηση του σκάφους περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$z(t) = z(t_k) + (t - t_k) \dot{z}(t_k) + \frac{(t - t_k)^2}{2} \ddot{z}(t_k)$$

και ακολουθεί τις αρχές της **ευθύγραμμης ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης**, και η εξίσωση της ταχύτητας θα δίνεται από τη σχέση

$$\dot{z}(t) = \dot{z}(t_k) + (t - t_k) \ddot{z}(t_k)$$

Σε διανυσματική μορφή θα έχουμε

$$\begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & \delta t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{\delta t^2}{2} \\ \delta t \end{bmatrix} \ddot{z}_{k-1}$$

Με επέκταση των παραπάνω σε δύο διαστάσεις, προκύπτει το δυναμικό μοντέλο

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}_{k-1} + \begin{bmatrix} \frac{\delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\delta t^2}{2} \\ \delta t & 0 \\ 0 & \delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}_{k-1}$$

$$\text{με } T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \delta t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta t \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} \frac{\delta t^2}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\delta t^2}{2} \\ \delta t & 0 \\ 0 & \delta t \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{bmatrix}.$$

Αριθμητικά δεδομένα

- Οι αρχικές συνθήκες για το διάνυσμα κατάστασης είναι $\mathbf{x}_0 = [7875.0\text{m}, 6319.392\text{m}, 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}, 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}]^T$

- Οι αρχικές μεταβλητότητες του διανύσματος κατάστασης είναι 20m^2 για τις θέσεις και $0.5\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$ για τις ταχύτητες
- Ο θόρυβος του μοντέλου ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέση τιμή $0\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ και μεταβλητότητα $0.017\frac{\text{m}^2}{\text{s}^4}$
- Οι θέσεις των ραδιοφάρων είναι γνωστές και οι συντεταγμένες τους είναι:

σημείο	x [m]	y [m]
A	10000.0	10000.0
B	13880.0	11250.0
C	15550.0	7160.0

- Η δειγματοληψία των μετρήσεων γίνεται κάθε 1 λεπτό ($\delta t = 60\text{s}$)
- Η ακρίβεια (**τυπική απόκλιση**) των μετρήσεων είναι $\pm 1\text{m}$
- Οι μετρήσεις προς τους ραδιοφάρους είναι:

Epoch	A	B	C
1	4249.7	7768.6	7721.1
2	3876.1	7321.4	7288.5
3	3518.4	6872.2	6857.6
4	3193.3	6426.0	6429.1
5	2903.6	5982.6	6009.7
6	2664.0	5543.2	5596.6
7	2490.9	5107.7	5191.5
8	2392.9	4678.9	4797.1
9	2383.2	4253.4	4417.8
10	2463.0	3841.7	4050.9
11	2623.2	3435.6	3709.9
12	2849.0	3054.2	3395.8
13	3126.7	2692.9	3119.4
14	3446.9	2366.6	2891.1
15	3793.4	2096.4	2724.4
16	4166.0	1900.6	2630.9
17	4552.2	1804.7	2610.2
18	4956.2	1824.8	2677.4
19	5366.4	1959.6	2819.7
20	5785.0	2182.8	3023.5

Υλοποίηση

```
In [1]: dt = 60.; % περίοδος μετρήσεων
var_state = [20. .5]; % αρχική μεταβλητότητα κατάστασης (θέση, ταχύτητα)
var_v = 1.; % μεταβλητότητα μετρήσεων
var_w = .017; % μεταβλητότητα θορύβου (επιταχύνσεων)
```

Θέσεις ραδιοφάρων

```
In [2]: x_beacon = [10000. 13880. 15550.];
y_beacon = [10000. 11250. 7160.];
```

Μετρήσεις

```
In [3]: measurements = [4249.7 7768.6 7721.1
                        3876.1 7321.4 7288.5
                        3518.4 6872.2 6857.6
                        3193.3 6426.0 6429.1
                        2903.6 5982.6 6009.7
                        2664.0 5543.2 5596.6
                        2490.9 5107.7 5191.5
                        2392.9 4678.9 4797.1
                        2383.2 4253.4 4417.8
                        2463.0 3841.7 4050.9
                        2623.2 3435.6 3709.9
                        2849.0 3054.2 3395.8
                        3126.7 2692.9 3119.4
                        3446.9 2366.6 2891.1
                        3793.4 2096.4 2724.4
                        4166.0 1900.6 2630.9
                        4552.2 1804.7 2610.2
                        4956.2 1824.8 2677.4
                        5366.4 1959.6 2819.7
                        5785.0 2182.8 3023.5];
epochs = size(measurements)(1)
```

epochs = 20

Διαστάσεις πινάκων

```
In [4]: m = 4; % συνιστώσες διανύσματος κατάστασης
        n = 3; % μετρήσεις σε κάθε εποχή
```

Αρχικοποίηση δυναμικού μοντέλου

```
In [5]: states = zeros(m, epochs); % "διάνυσμα" κατάστασης· η i-στήλη του πίνακα περιέχει το διά
states(:, 1) = [7875., 6319.392, 7., 3.]'; % πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του διανύσματος κ
% state_corrections = zeros(m, epochs); % πίνακας μετάβασης
Qxx = diag(repelem(var_state, 2)) % πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του θορύβου
T = eye(m); % πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του δυναμικού μον
T(1, 3) = dt;
T(2, 4) = dt;
H = zeros(m, 2); % πίνακας συντελεστών του θορύβου
H(1, 1) = dt^2 / 2.;
H(2, 2) = H(1, 1);
H(3, 1) = dt;
H(4, 2) = H(3, 1)
Qww = var_w * eye(2) % πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του θορύβου
Quu = H * Qww * H' % πίνακας μεταβλητότητας - συμμεταβλητότητας του δυναμικού μον
```

Qxx =

Diagonal Matrix

20.00000	0	0	0
0	20.00000	0	0
0	0	0.50000	0
0	0	0	0.50000

T =

1	0	60	0
0	1	0	60
0	0	1	0
0	0	0	1

H =

1800	0
0	1800
60	0
0	60

Qww =

Diagonal Matrix

0.017000	0
0	0.017000

Quu =

55080.00000	0.00000	1836.00000	0.00000
0.00000	55080.00000	0.00000	1836.00000
1836.00000	0.00000	61.20000	0.00000
0.00000	1836.00000	0.00000	61.20000

Φίλτρο Kalman


```

In [7]: % data = zeros(epochs, 7);
data = zeros(epochs, 3);
% data(:, 4:7) = state_corrections(:, :);
data(1, 3) = atan2(states(3, 1), states(4, 1)) * 180. / pi;
if data(1, 3) < 0.
    data(1, 3) = data(1, 3) + 360.;
endif
data(1, 2) = sqrt(states(3, 1)^2 + states(4, 1)^2);
for k = 2:epochs
    dx = states(1, k) - states(1, k-1);
    dy = states(2, k) - states(2, k-1);
    data(k, 1) = data(k-1, 1) + sqrt(dx^2 + dy^2);
    data(k, 2) = sqrt(states(3, k)^2 + states(4, k)^2);
    heading = atan2(states(3, k), states(4, k)) * 180. / pi;
    if heading < 0.
        heading = heading + 360.;
    endif
    data(k, 3) = heading;
endfor
fprintf('\n\nfiltered values');
fprintf('\nepoch distance velocity heading');
for k = 1:epochs
    fprintf('\n%3d %11.3f %8.3f %8.3f', k, data(k, 1:3));
endfor

```

```

filtered values
epoch distance velocity heading
1 0.000 7.616 66.801
2 461.400 7.779 61.286
3 925.806 7.715 65.975
4 1390.357 7.775 62.905
5 1853.155 7.656 64.729
6 2315.773 7.765 63.208
7 2778.387 7.660 65.206
8 3240.322 7.741 62.817
9 3703.373 7.698 64.889
10 4165.683 7.713 63.805
11 4631.259 7.805 63.717
12 5091.795 7.550 64.711
13 5555.396 7.900 63.076
14 6020.782 7.618 64.761
15 6481.164 7.728 63.223
16 6945.300 7.744 64.584
17 7405.657 7.603 63.888
18 7872.215 7.945 63.889
19 8335.291 7.497 64.090
20 8796.471 7.872 64.039

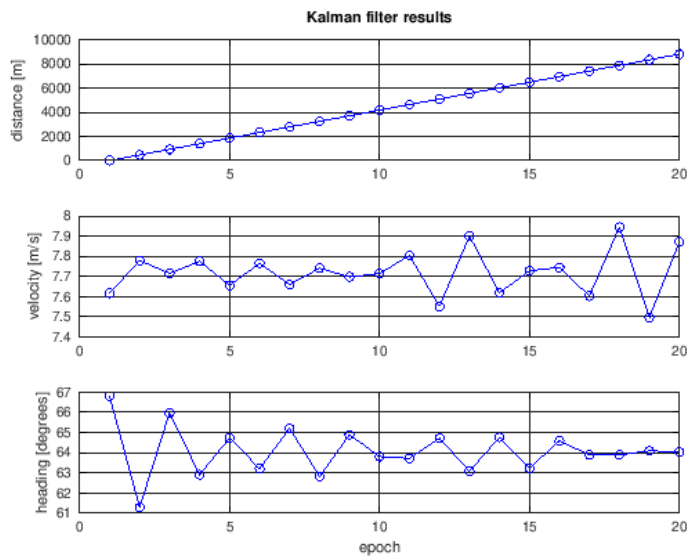
```

Διαγράμματα

```

In [8]: subplot(3, 1, 1);
plot(1:epochs, data(:, 1), 'bo-');
grid on;
title('Kalman filter results');
ylabel('distance [m]');
subplot(3, 1, 2);
plot(1:epochs, data(:, 2), 'bo-');
grid on;
ylabel('velocity [m/s]');
subplot(3, 1, 3);
plot(1:epochs, data(:, 3), 'bo-');
grid on;
xlabel('epoch')
ylabel('heading [degrees]');

```



Αναφορές

Deakin, R.E., "The Kalman filter and surveying applications", School of Mathematical and Geospatial Sciences, RMIT University, June 2006

In []: