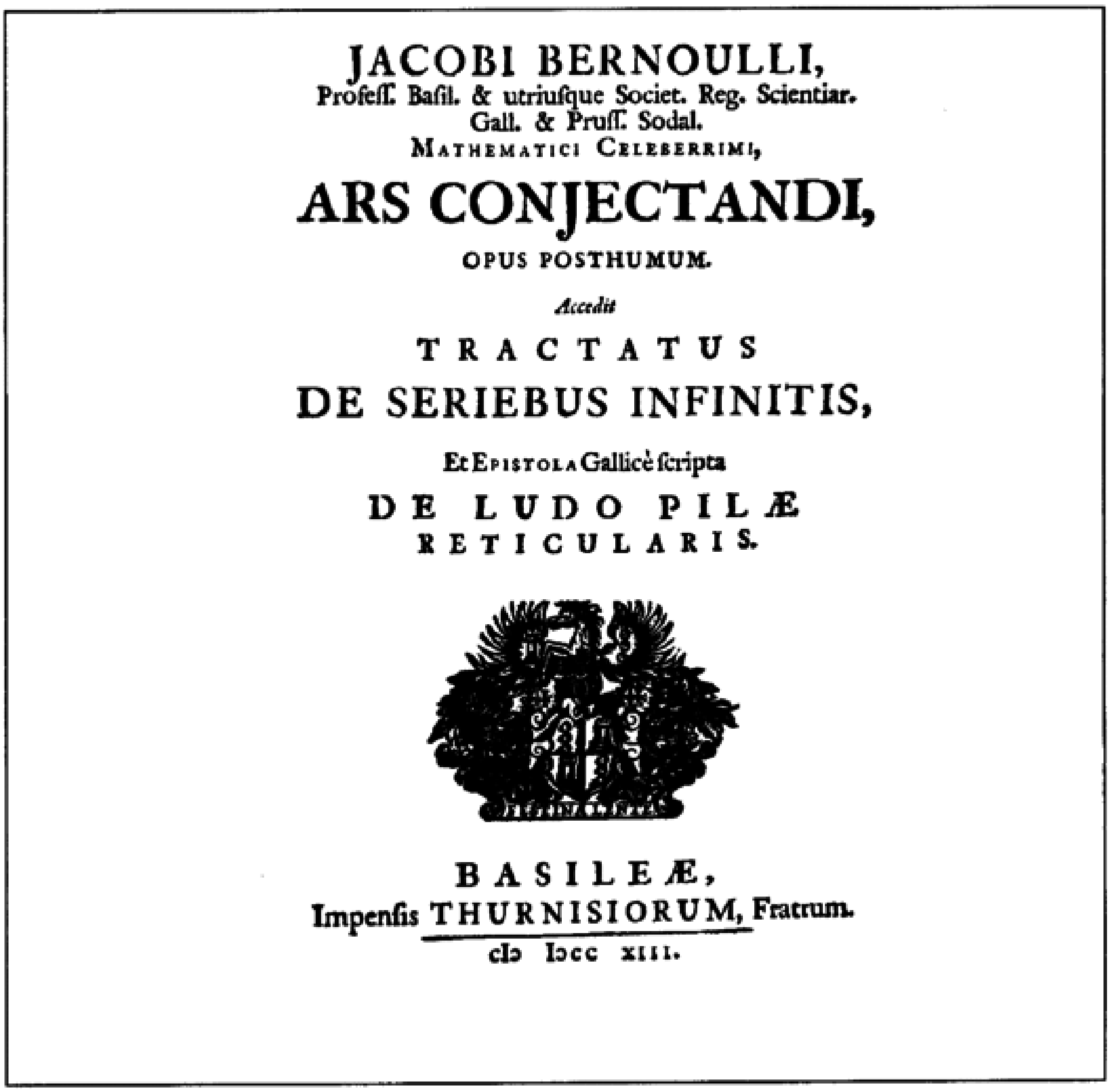
Ιστορικά στοιχεία για την εξέλιξη της Θεωρίας Πιθανοτήτων

Συλλογή άρθρων από την ΒΙΚΙΠΑΙΔΕΙΑ

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Ars Conjectandi


JACOBI BERNOULLI,
Profess. Basil. & utriusque Societ. Reg. Scientiar.
Gall. & Pruss. Sodal.
MATHEMATICI CELEBERRIMI,

ARS CONJECTANDI,
OPUS POSTHUMUM.
Accedit
TRACTATUS
DE SERIEBUS INFINITIS,
Et EPISTOLA Gallicè scripta
DE LUDO PILÆ
RETICULARIS.

BASILEÆ,
Impensis THURNISIORUM, Fratrum.
cIↄ Iↄcc xiii.

Το εξώφυλλο του Ars Conjectandi

Ars Conjectandi (λατινικά: *Η τέχνη του εικάζειν*) είναι ο τίτλος μαθηματικής διατριβής του Γιακόμπ Μπερνούλι η οποία δημοσιεύτηκε οκτώ χρόνια μετά τον θάνατό του από τον ανεψιό του, Νίκλαους Μπερνούλι, το 1713. Το έργο εμπέδωνε την γνωστή μέχρι τότε θεωρία πιθανοτήτων και επέκτεινε το θέμα. Ανακηρύχθηκε ορόσημο στον τομέα των πιθανοτήτων από τον μαθηματικό ιστορικό Ουίλιαμ Ντάναμ. Ακόμα επηρέασε σύγχρονους και μεταγενέστερους μαθηματικούς όπως ο Αβραάμ ντε Μουάβρ

Ο Μπερνούλι έγραψε το κείμενο μεταξύ 1684 και 1689, συμπεριλαμβάνοντας το έργο μαθηματικών όπως ο Κρίστιαν Χόυχενς, ο Τζερόλαμο Καρντάνο, ο Πιέρ ντε Φερμά και ο Μπλεζ Πασκάλ. Διαπραγματεύτηκε θέματα όπως η θεωρία των διατάξεων και των συνδυασμών, καθώς και αυτά που συνδέονται ελαφρώς με την θεωρία αριθμών, η προέλευση και οι ιδιότητες των αριθμών Μπερνούλι, για παράδειγμα. Περιλαμβάνονταν και άλλα θεμελιώδη θέματα πιθανοτήτων, όπως η αναμενόμενη τιμή.

1.1 Υπόβαθρο

Τζερόλαμο Καρντάνο, πρωτοπόρος της θεωρίας πιθανοτήτων

Στην Ευρώπη, το θέμα των πιθανοτήτων αναπτύχθηκε επίσημα πρώτη φορά τον δέκατο έκτο αιώνα με το έργο του Καρντάνο, του οποίου το ενδιαφέρον για τις πιθανότητες πήγαζε από την αγάπη του για τον τζόγο.[1] Έθεσε επίσημα αυτό που σήμερα ονομάζεται κλασικός ορισμός της πιθανότητας: αν ένα γεγονός έχει a πιθανά αποτελέσματα και επιλεγούν οποιαδήποτε b από αυτά έτσι ώστε $b \leq a$, η πιθανότητα να συμβεί οποιοδήποτε από τα b είναι $\frac{b}{a}$ Ωστόσο η πραγματική του επιρροή δεν ήταν μεγάλη. Έγραψε μόνο ένα βιβλίο πάνω στο θέμα το 1525 με τίτλο *Liber de ludo aleae* (*Βιβλίο πάνω στα παιχνίδια τύχης*), το οποίο όμως δημοσιεύτηκε μετά τον θάνατό του το 1663.[2][3]

Η ημερομηνία την οποία η ιστορικοί θεωρούν ως την αρχή των πιθανοτήτων με την σύγχρονη έννοια είναι το 1654, χρονιά κατά την οποία ο Πασκάλ και ο Φερμά άρχισαν να αλληλογραφούν σχετικά με τις πιθανότητες. Αιτία για αυτό ήταν γράμμα που είχε στείλει την ίδια χρονιά ένας τζογαδόρος από το Παρίσι ονόματι Αντουάν Γκομπό (*Antoine Gombaud*) στον Πασκάλ και άλλους μαθηματικούς ρωτώντας διάφορα σχετικά με πιθανότητες. Πιο συγκεκριμένα έθεσε το πρόβλημα της διαίρεσης του στοιχήματος, σχετικά με ένα θεωρητικό παιχνίδι δύο παιχτών στο οποίο κερδίζει ένας από τους δύο μετά από συγκεκριμένο αριθμό γύρων. Το ερώτημα αφορούσε τον δίκαιο διαμοιρασμό της αξίας που είχε συγκεντρωθεί αν το παιχνίδι σταματούσε πρόωρα λόγω κάποιας εξωτερικής αιτίας. Η αλληλογραφία Πασκάλ και Φερμά προκάλεσε το ενδιαφέρον άλλων μαθηματικών, όπως ο Κρίστιαν Χόυχενς, ο οποίος το 1657 δημοσίευσε το *De ratiociniis in aleae ludo* (*Υπολογισμοί στα παιχνίδια της τύχης*).[2] Κατά την διάρκεια αυτής της περιόδου ο Πασκάλ δημοσίευσε επίσης τα αποτελέσματά του σχετικά με το τρίγωνο του Πασκάλ. Αναφέρονταν στο τρίγωνο, στο έργο του *Traité du triangle arithmétique* (*Χαρακτηριστικά του αριθμητικού τριγώνου*), ως το «αριθμητικό τρίγωνο».[4] Αργότερα ο Γιαν ντε Βιτ δημοσίευσε παρόμοιο υλικό στο έργο του *Waerdye van Lyf-Renten*, στο οποίο χρησιμοποίησε στατιστικές έννοιες ώστε να προσδιορίσει το προσδόκιμο ζωής.[5]

Ο Μπερνούλι είχε μεγάλη παραγωγή μαθηματικού έργου μεταξύ 1684 και 1689 στην οποία περιλαμβάνεται και το *Ars Conjectandi*.[1] Όταν ξεκίνησε το έργο του το 1684 σε ηλικία 30 ετών, δεν είχε ακόμα διαβάσει το έργο του Πασκάλ για το αριθμητικό τρίγωνο ούτε του ντε Βιτ για την στατιστική πιθανότητα. Είχε ζητήσει ένα αντίγραφο του τελευταίου από τον γνωστό του, Γκότφριντ Βίλχελμ Λάιμπνιτς, αλλά ο Λάιμπνιτς δεν κατάφερε να του το στείλει. Του έστειλε ωστόσο τα έργα του Πασκάλ και του Χόυχενς, στα οποία βασίζεται το *Ars Conjectandi*.[6] Ο Μπερνούλι ονόμασε το έργο *Ars Conjectandi* επειδή επιθυμούσε να το συνδέσει με την έννοια *ars inveniendi* του σχολαστικισμού, το οποίο με την σειρά του υποδεικνύει ότι τα αποτελέσματά του θα μπορούσαν να εφαρμοστούν σε όλες τις πτυχές της ζωής και της κοινωνίας.[7] Ο ανεψιός του, Νίκλαους Μπερνούλι, δημοσίευσε το χειρόγραφο το 1713, μετά τον θάνατο του Μπερνούλι το 1705.[8][9]

1.2 Περιεχόμενα

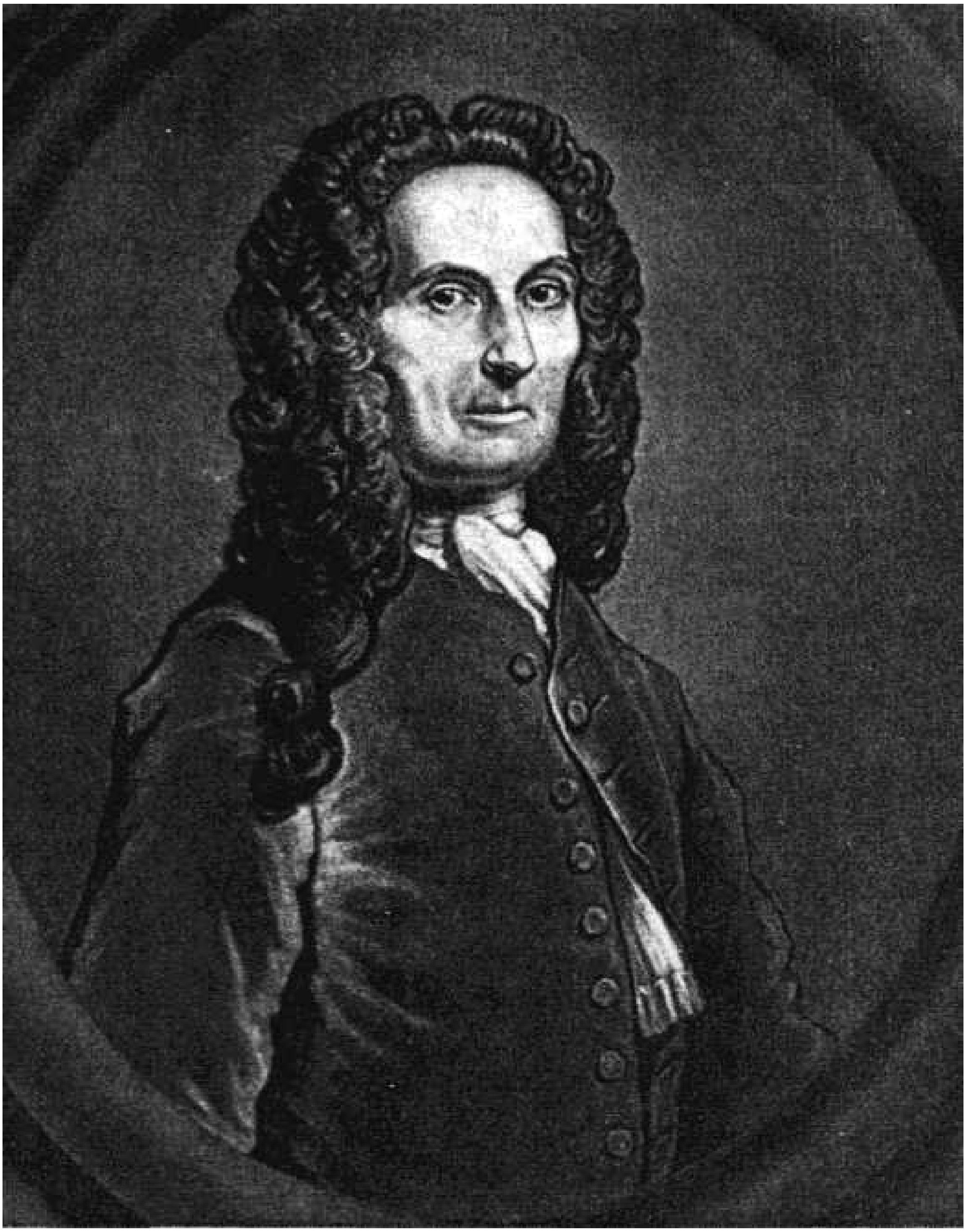
Το έργο του Μπερνούλι, αρχικά δημοσιευμένο στα λατινικά,[10] διαιρείται σε τέσσερα μέρη.[6] Κάλυπτε κατά κύριο λόγο την θεωρία του για τις διατάξεις και τους συνδυασμούς, τα βασικά θεμέλια της σημερινής συνδυαστικής. Πραγματεύονταν επίσης τους αριθμούς Μπερνούλι, οι οποίοι είχαν σχέση περισσότερο με την θεωρία αριθμών παρά με τις πιθανότητες. Αυτοί φέρουν το όνομα του σήμερα, και είναι ένα από τα πλέον σημαντικά κατορθώματά του.[11][12]

Στο πρώτο μέρος, ο Μπερνούλι πραγματεύονταν σε βάθος το έργο του Χόυχενς, *De ratiociniis in aleae ludo* λύνοντας τα προβλήματα που είχε θέσει στο τέλος ο Χόυχενς.[6] Ο Μπερνούλι συγκεκριμένα ανέπτυξε την έννοια του Χόυχενς για την αναμενόμενη τιμή, ή ο ζυγισμένος μέσος όλων των πιθανών ενδεχομένων ενός γεγονότος. Ο Χόυχενς είχε αναπτύξει την ακόλουθη εξίσωση:

$$E = \frac{p_0a_0+p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_0+p_1+\cdots+p_n}.$$ [13]

Σε αυτή την εξίσωση, το E είναι η αναμενόμενη τιμή, το pi είναι οι πιθανότητες να πραγματωθεί κάθε τιμή, και το ai είναι οι τιμές. Ο Μπερνούλι κανονικοποίησε την αναμενόμενη τιμή υποθέτοντας ότι pi είναι οι πιθανότητες όλων των ξένων ενδεχομένων, οδηγούμενος έτσι στο συμπέρασμα ότι $p_0 + p_1 + ... + pn = 1$. Μία ακόμα θεωρία που αναπτύχθηκε σε αυτό το τμήμα είναι η πιθανότητα να επιτευχθεί τουλάχιστον ένας αριθμός επιτυχιών σε ένα αριθμό πειραμάτων, που σήμερα ονομάζονται δοκιμές Μπερνούλι,[14] με διάφορα αποτελέσματα δεδομένου όμως ότι η πιθανότητα της επιτυχίας σε κάθε πείραμα είναι η ίδια. Ο Μπερνούλι έδειξε με μαθηματική επαγωγή ότι δεδομένου ότι a είναι ο αριθμός των επιθυμητών αποτελεσμάτων σε κάθε πείραμα και b ο αριθμός των συνολικών πιθανών αποτελεσμάτων, d ο επιθυμητός αριθμός επιτυχών αποτελεσμάτων, και e ο αριθμός πειραμάτων, η πιθανότητα μπορεί να εκφραστεί ως

$$P = \sum_{i=0}^{e-d} \binom{e}{d+i} \left(\frac{a}{b}\right)^{a+v} \left(\frac{b-a}{b}\right)^{e-d-i}.$$ [15]



Ο Αβραάμ ντε Μουάβρ, ο οποίος επηρεάστηκε από το έργο του Μπερνούλι.

ΤΟ πρώτο μέρος πραγματεύεται επίσης αυτό που είναι γνωστό σήμερα ως κατανομή Μπερνούλι.[10]

Το δεύτερο μέρος πραγματεύεται την συνδυαστική, ή την συστηματική αρίθμηση αντικειμένων—σε αυτό το μέρος εισήχθησαν οι έννοιες των διατάξεων και των συνδυασμών που θα αποτελέσουν την βάση του θέματος. Πραγματεύτηκε επίσης την γενική εξίσωση για αθροίσματα ακεραίων δυνάμεων, οι ελεύθεροι συντελεστές της οποίας προς τιμήν του ονομάζονται αριθμοί Μπερνούλι, η οποία αποδείχθηκε ευρύτατα χρήσιμη στην θεωρία αριθμών.[16] Επιπλέον, αυτό το μέρος περιείχε την εξίσωση για το άθροισμα δυνάμεων ακεραίων, το οποίο επηρέασε αργότερα το έργο του Αβραάμ ντε Μουάβρ.[10]

Στο τρίτο μέρος, ο Μπερνούλι εφάρμοσε τις τεχνικές πιθανότητας, που μελέτησε στα προηγούμενα μέρη, σε κοινά τυχερά παιχνίδια της εποχής με τράπουλα ή ζάρια.[6] Παρουσίασε προβλήματα πιθανοτήτων σχετικά με αυτά αλλά και γενικεύσεις αυτών χωρίς συγκεκριμένες σταθερές. Για παράδειγμα, ένα πρόβλημα το οποίο είχε να κάνει με την αναμενόμενη τιμή φιγούρων που θα τραβούσε κάποιος από μια τράπουλα 20 φύλλων με 10 φιγούρες μπορούσε να γενικευθεί σε πρόβλημα με a φύλλα που είχαν b φιγούρες έτσι ώστε $b<a$.[17]

Το τέταρτο μέρος πραγματεύεται την εφαρμογή των πιθανοτήτων σε προσωπικές, δικαστικές και οικονομικές αποφάσεις. Σε αυτή την ενότητα ο Μπερνούλι διαφέρει τον τρόπο σκέψης που σχετίζεται με την συχνότητα πιθανότητας, κατά τον οποίο η πιθανότητα ορίζεται με εμπειρικό τρόπο.[18] Διαφέρει με ένα αποτέλεσμα που σχετίζεται με τον νόμο των μεγάλων αριθμών, στο οποίο ο Μπερνούλι περιέγραψε ότι προβλέποντας τα αποτελέσματα της παρατήρησης θα προσεγγίζουν την θεωρητική πιθανότητα καθώς γίνονται περισσότερες δοκιμές, ενώ κατά με βάση την σχολή της συχνότητας πιθανότητας, η πιθανότητα ορίζεται αντίστροφα.[8] Ο Μπερνούλι ήταν πολύ περίφανος για αυτό το αποτέλεσμα, αναφερόμενος σε αυτό ως το «χρυσό θεώρημα» του, [19] και σχολίασε ότι ήταν «ένα πρόβλημα με το οποίο είχε ασχοληθεί για είκοσι χρόνια». [20] Η πρώιμη εκδοχή αυτού του θεωρήματος είναι σήμερα γνωστή είτε ως θεώρημα Μπερνούλι είτε ως αδύναμος νόμος των μεγάλων αριθμών, καθώς ήταν λιγότερο αυστηρός από την σύγχρονη εκδοχή.[21]

Ο Μπερνούλι προσέθεσε στο *Ars Conjectandi* ένα παράρτημα πάνω στον λογισμό, το οποίο είχε να κάνει με τις άπειρες σειρές.[10] Ήταν ανατύπωση πέντε πραγματειών του που είχε δημοσιεύσει μεταξύ 1686 και 1704.[15]

1.3 Κληρονομιά

Ο Ντάναμ αποκάλεσε το *Ars Conjectandi* «το επόμενο ορόσημο στην θεωρία πιθανοτήτων [μετά το έργο του Καρντάνο]» καθώς και το «αριστούργημα του Μπερνούλι».[1] Βοήθησε δε τα μέγιστα σε αυτό που Ντάναμ αποκαλεί «την από μακρού καθιερωμένη φήμη του Μπερνούλι».[22]

Το έργο του Μπερνούλι επηρέασε πολλούς σύγχρονούς του και μεταγενέστερους μαθηματικούς. Το παράρτημα απειροστικού λογισμού αναφέρονταν πιο συχνά, με πιο σημαντικό παράδειγμα τον σκοτσέζο Κόλιν Μακλόριν.[10] Ο Αβραάμ ντε Μουάβρ επηρεάστηκε εν μέρει από το έργο του Μπερνούλι. Έγραψε για την έννοια της πιθανότητας στο έργο του *The Doctrine of Chances*.[23] Το πιο σημαντικό κατόρθωμα του ντε Μουάβρ στις πιθανότητες ήταν το θεώρημα του κεντρικού ορίου, με το οποίο μπόρεσε να προσεγγίσει την διωνυμική κατανομή.[10] Το έκανε αυτό χρησιμοποιώντας μια ασυμπτωτική ακολουθία της παραγοντικής συνάρτησης—η οποία είχε αναπτυχθεί από τον Τζέιμς Στέρλινγκ—και την εξίσωση του Μπερνούλι για το άθροισμα δυνάμεων.[10]

Ο Τομας Σίμπσον κατέληξε σε ένα αποτέλεσμα παρόμοιο με του ντε Μουάβρ. Σύμφωνα με τον πρόλογο του έργου του Σίμπσον, το έργο του βασίζονταν κατά πολύ σε αυτό του ντε Μουάβρ. Ο ίδιος ο ντε Μουάβρ χαρακτήρισε το έργο του Σίμπσον ως συντομευμένη έκδοση του δικού του.[24] Το Τόμας Μπέις (*Thomas Bayes*) σε ένα δοκίμιο του πραγματεύτηκε θεολογικές προεκτάσεις των αποτελεσμάτων του ντε Μουάβρ. Η λύση του ντε Μουάβρ σε ένα πρόβλημα, συγκεκριμένα του καθορισμού της πιθανότητας ενός γεγονότος από την σχετική του συχνότητα, θεωρήθηκε ως απόδειξη για την ύπαρξη του Θεού από τον Μπέις.[25]

1.4 Παραπομπές

[1] Dunham 1990, σελ. 191

[2] Abrams, William, *A Brief History of Probability*, Second Moment, http://www.secondmoment.org/articles/probability.php, ανακτήθηκε στις 2008-05-23

[3] O'Connor, John J.; Robertson, Edmund F., *Cardano Biography*, MacTutor, http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cardan.html, ανακτήθηκε στις 2008-05-23

[4] «Blaise Pascal», *Encyclopædia Britannica Online*, 2008, http://www.britannica.com/EBchecked/topic/445406/Blaise-Pascal/15001/Pascals-life-to-the-Port-Royal-years#ref=ref365130, ανακτήθηκε στις 2008-05-23

[5] Brakel 1976, σελ. 123

[6] Shafer 2006, σελίδες 3–4

[7] Elart von Collani (2006), «Jacob Bernoulli Deciphered», *Newsletter of the Bernoulli Society for Mathematical Statistics and Probability* **13** (2), http://isi.cbs.nl/bnews/06b/bn_1.html, ανακτήθηκε στις 2008-07-03

*Ο Κόλιν Μακλόριν (*Colin Maclaurin*)*

[8] Bernoulli 2005, σελ. i

[9] Weisstein, Eric, *Bernoulli, Jakob*, Wolfram, http://scienceworld.wolfram.com/biography/BernoulliJakob.html, ανακτήθηκε στις 2008-06-09

[10] Schneider 2006, σελίδες 3

[11] «Jakob Bernoulli», *Encyclopædia Britannica Online*, 2008, http://www.britannica.com/EBchecked/topic/62599/Jakob-Bernoulli#ref=ref782754, ανακτήθηκε στις 2008-05-23

[12] «Bernoulli», *The Columbia Electronic Encyclopedia* (6th έκδοση), 2007

[13] Ο συμβολισμός $\binom{n}{r}$ αναπαριστά τον αριθμό τον τρόπων που μπορεί να επιλεχθεί r αντικείμενα από ένα σύνολο n διακριτών αντικειμένων χωρίς αντικατάσταση.

[14] Dunham 1994, σελ. 11

[15] Schneider 2006, σελίδες 7–8

[16] Maseres, Bernoulli & Wallis 1798, σελ. 115

[17] Hald 2003, σελ. 254

[18] Shafer 2006, σελίδες 18

[19] Dunham 1994, σελ. 17–18

[20] Polasek, Wolfgang (2000), «The Bernoullis and the Origin of Probability Theory», *Resonance* (Indian Academy of Sciences) **26** (42)

[21] Weisstein, Eric W., “Weak Law of Large Numbers” από το MathWorld.

[22] Dunham 1990, σελ. 192

[23] de Moivre 1716, σελ. i

[24] Schneider 2006, σελ. 11

[25] Schneider 2006, σελ. 14

1.5 Πηγές

- Bernoulli, Jakob (1713), *Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis*, Basel: Thurneysen Brothers, OCLC 7073795
- Bernoulli, Jakob, translated by Edith Sylla (1713/2005), *The Art of Conjecturing, together with Letter to a Friend on Sets in Court Tennis (English translation)*, Baltimore: Johns Hopkins Univ Press, ISBN 0-8018-8235-4, http://books.google.com/books?id=-xgwSAjTh34C&dq=edith+dudley+sylla&source=gbs_summary_s&cad=0
- Bernoulli, Jakob, translated by Oscar Sheynin (1713/2005), *On the Law of Large Numbers, Part Four of Ars Conjectandi (English translation)*, Berlin: NG Verlag, ISBN 3-938417-14-5, http://www.sheynin.de/download/bernoulli.pdf
- Bernoulli, Jakob; Haussner, Robert (translator) (1713/2002), *Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi) (German translation)*, Frankfurt am Main: Harri Deutsch, ISBN 3-8171-3107-0, http://quod.lib.umich.edu/cgi/t/text/text-idx?c=umhistmath;idno=ABZ9501
- Brakel, J. van (1976), «Some Remarks on the Prehistory of the Concept of Statistical Probability», *Archive for History of Exact Sciences* (Heidelberg) **16** (2): 119, doi:10.1007/BF00349634
- Dunham, William (1990), *Journey Through Genius* (1st έκδοση), John Wiley and Sons, ISBN 0-471-50030-5
- Dunham, William (1994), *The Mathematical Universe* (1st έκδοση), John Wiley and Sons, ISBN 0-471-53656-3
- Hald, Anders (2005), *A History of Probability and Statistics and Their Applications Before 1750*, Wiley, ISBN 978-0-471-47129-5
- Maseres, Francis; Bernoulli, Jakob; Wallis, John (1798), *The Doctrine of Permutations and Combinations*, British Critic
- de Moivre, Abraham (1716/2000), *The Doctrine of Chances* (3 έκδοση), Chelsea Publishers, ISBN 978-0821821039
- Schneider, Ivo (2006), «Direct and Indirect Influences of Jakob Bernoulli’s Ars Conjectandi in 18th Century Great Britain», *Electronic Journal for the history of Probability and Statistics* **2** (1)
- Shafer, Glenn (1996), «The Significance of Jacob Bernoulli’s Ars Conjectandi for the Philosophy of Probability Today», *Journal of Econometrics* **75** (1): 15–32, doi:10.1016/0304-4076(95)01766-6, http://www.glennshafer.com/assets/downloads/articles/article55.pdf

Κεφάλαιο 2

Μπλεζ Πασκάλ

Ο **Μπλεζ Πασκάλ** (Blaise Pascal, 19 Ιουνίου 1623 - 19 Αυγούστου 1662) ήταν Γάλλος μαθηματικός, φυσικός, συγγραφέας και φιλόσοφος.

2.1 Βιογραφία

2.1.1 Τα πρώτα χρόνια

Γεννήθηκε στο Κλερμόν-Φεράν το 1623. Ο Μπλεζ Πασκάλ ήταν έναν παιδί θαύμα. Η μητέρα του πέθανε όταν ήταν τριών μόλις χρονών, και λίγο αργότερα, ο πατέρας του Πασκάλ, Ετιέν Πασκάλ, ένας πλούσιος φοροεισπράκτορας και παθιασμένος ερασιτέχνης μαθηματικός, μετακόμισε από το Κλερμόν, στο Παρίσι, όπου προσωπικά επέβλεψε την κατ' οίκον εκπαίδευση του υιού του. Ο Ετιέν είχε κάποιες παράξενες απόψεις. Αποφάσισε πως ο γιος του Μπλεζ, δεν έπρεπε να διδαχτεί μαθηματικά πριν από τα 15 του χρόνια, και γι' αυτό τον λόγο απομάκρυνε κάθε είδους μαθηματικό εγχειρίδιο από το σπίτι στο οποίο διέμεναν. Όμως το μόνο που κατάφερε με όλη αυτή την κίνηση ήταν να εξάψει την περιέργεια του νεαρού Μπλεζ για το απαγορευμένο αντικείμενο. Έτσι ο Πασκάλ άρχισε να μελετά γεωμετρία σε ηλικία δώδεκα ετών. Ανακάλυψε μόνος του ότι το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου ισούται με δύο ορθές γωνίες και όταν ο πατέρας του, Ετιέν, είδε τα επιτεύγματα του γιου του, εντυπωσιάστηκε τόσο ώστε να αποφασίσει να άρει την απόφασή του, και να επιτρέψει στο γιο τη μελέτη μαθηματικών κειμένων, αρχίζοντας με το κλασσικό έργο "Στοιχεία" του Ευκλείδη. Άρχισε επίσης να πηγαίνει, τον προφανώς χαρισματικό Μπλεζ στις συναντήσεις της Ακαδημίας του Μερσέν, μια από τις πολλές ημιεπίσημες ομάδες μαθηματικών και επιστημόνων στο Παρίσι, οι οποίες οδήγησαν στη ίδρυση της Βασιλικής Ακαδημίας Επιστημών το 1666. Στα 16 του χρόνια ανέπτυξε σε μια πραγματεία περί κωνικών τομών το θεώρημα που φέρει το όνομά του.

2.2 Οι εφευρέσεις και ανακαλύψεις

Από το 1641 και για περίπου 3 χρόνια εργάστηκε για την κατασκευή μιας αριθμομηχανής που μπορούσε να κάνει πρόσθεση και αφαίρεση που ονομάστηκε «Πασκαλίνα». Παρόλη την ενασχόλησή του, δεν πέτυχε ως επιχειρηματίας αριθμομηχανών: η μηχανή του δεν έκανε μεγάλες πωλήσεις και, τελικά, σταμάτησε να παράγεται. Το 1647 ανακάλυψε την Αρχή του Πασκάλ και τη χρήση τού βαρομέτρου για τη μέτρηση του υψομέτρου. Με την εργασία του *Traité du triangle arithmétique*, που δημοσιεύτηκε το 1654, έθεσε τις βάσεις για τη Συνδυαστική και το Λογισμό των Πιθανοτήτων. Επίσης μια από τις πιο γνωστές μαθηματικές μελέτες του είναι αυτό που ονομάζουμε "τρίγωνο του Πασκάλ" ή απλούστερα "αριθμητικό τρίγωνο". Το εν ΄λόγω τρίγωνο σχηματίζεται ως εξής: Αρχικά γράφουμε τον αριθμό 1. Κάτω από τον αριθμό 1, δεξιά και αριστερά του, τοποθετούμε πάλι τον αριθμό 1. Στην τρίτη σειρά, τοποθετούμε στα άκρα τον αριθμό 1 αυξάνοντας την απόσταση όμως μεταξύ των αριθμών. Στο μέσο τους γράφουμε τον αριθμό που προκύπτει από το άθροισμα των παρακείμενων αριθμών της προηγούμενης σειράς, δηλαδή 1+1=2. Με τον ίδιο τρόπο συμπληρώνουμε και τις επόμενες σειρές. Από μία σύγχρονη οπτική, το Τρίγωνο του Πασκάλ φαίνεται να είναι μαθηματικώς απλό και το ίδιο ισχύει και για πολλές ενδιαφέρουσες ιδιότητες που όπως ανακάλυψε ο Πασκάλ συσχετίζουν τους αριθμούς του τριγώνου. Η σπουδαιότητα του τριγώνου όμως διαφαίνεται και αλλού: Εντούτοις αποδείχτηκε ότι το τρίγωνο είναι ιδιαίτερα σημαντικό στη στοιχειώδη άλγεβρα και στη θεωρία πιθανοτήτων, καθώς τα στοιχεία κάθε γραμμής δίνουν τους περίφημους δυωνυμικούς συντελεστές οι οποίοι εμφανίζονται στο ανάπτυγμα της έκφρασης (a+b)^n. Αξίζει να προσθέσουμε πως αν και ο Πασκάλ ήταν πολύ έξυπνος, δεν απέκτησε ποτέ ακαδημαϊκή καριέρα σε κάποιο πανεπιστήμιο.

2.2.1 Θεολογική και φιλοσοφική ενασχόληση

Στα 20 του, ο Πασκάλ αρρώστησε και ουσιαστικά ποτέ δεν ανέκτησε τις δυνάμεις του. Στα τελευταία του χρόνια, φαίνεται να μειώθηκε το ενδιαφέρον του για τα μαθηματικά και εστίασε περισσότερο την προσοχή του σε συγγραφή θρησκευτικών συγγραμμάτων. Το 1654 είχε ο Πασκάλ την εμπειρία ενός μυστικιστικού οράματος, οπότε αποσύρθηκε στο μοναστήρι *Port Royal* και αφοσιώθηκε, παράλληλα με τις μαθηματικές εργασίες του, σε θεολογικές και φιλοσοφικές μελέτες. Το σύγγραμμά του «Επαρχιακές επιστολές για την ηθική διδασκαλία των Ιησουιτών» (1656-57), με το οποίο παίρνει θέση στην αντιδικία μεταξύ της κορυφής της καθολικής εκκλησίας και του θρησκευτικού κινήματος του Γιανσενισμού, αποτελεί λογοτεχνικό αποκορύφωμα της γαλλικής πρόζας εκείνης της εποχής. Το έργο του για την υποστήριξη του Χριστιανισμού, *Pensées*, στο οποίο ο Πασκάλ εργαζόταν από το 1654 και με το οποίο προσπάθησε να μεταφέρει τους νόμους της Λογικής στη χριστιανική θρησκεία, έμεινε ανολοκλήρωτο, πιθανόν λόγω της σταδιακά επιδεινούμενης υγείας τού μεγάλου φιλοσόφου. Άλλοι βέβαια εκτιμούν (Μπέρτραντ Ράσελ) ότι το εγχείρημα αυτό απέτυχε λόγω των αδιεξόδων που συνάντησε ο Πασκάλ στην επιχειρηματολογία του.

Ο Πασκάλ εναντιώθηκε στη δυϊστική αντίληψη του Καρτέσιου για την επιστήμη και τον κόσμο και θεωρούσε ότι η άπειρη απόσταση μεταξύ θεού και ανθρώπου μπορεί να ξεπεραστεί μόνο με θεϊκή χάρη.

Πέθανε στο Παρίσι το 1662.

2.3 Έργα του Μπλεζ Πασκάλ στα Ελληνικά

- *Pensées*
  - Σκέψεις. Μετάφρ. Π.Αντωνόπουλος. «Αναγνωστίδης», χχ.
  - Στοχασμοί. Προλεγόμενα-Μετάφρ.-Σχόλια Νίκος Ματσούκας. «Πουρναράς», Θεσσαλονίκη 1999[2] (1η έκδοση, 1986)
  - Σκέψεις. Μετάφρ. Κωστής Παπαγιώργης, Επιμ. Δημήτρης Αρμάος. 2η έκδοση, "Καστανιώτης", Αθήνα 2008 (2000[1])
- Η τέχνη της πειθούς. Μετάφρ. Δημήτρης Κουσουρής, Εισαγωγή Τεύκρος Μιχαηλίδης. εκδ."Ροές", Αθήνα 2005.
- Τα πάθη του έρωτα. Μετάφρ. Αλέξανδρος Βέλιος. 2η έκδοση,εκδ. «Ροές», Αθήνα 2007 (1998[1])
- Η αθλιότητα του ανθρώπου και άλλες σκέψεις. Μετάφρ. Γιούλη Τσίρου, εκδ. «Το Ποντίκι», Αθ. 2009

2.4 Βιβλιογραφία

- Δελλής, Ιωάννης, «Επιδράσεις του αρχαίου σκεπτικισμού στις γνωσιολογικές αντιλήψεις του B. Pascal». Επετηρίς της Εταιρείας Ηλειακών Σπουδών. Εν Αθήναις 5 (1987-1988), 61-71.
- Βώκος, Γεράσιμος, Η γραφομηχανή. Εισαγωγή στις Σκέψεις του Πασκάλ, εκδ. «Νήσος», Αθήνα, 1997.
- Ξηρογιάννη, Παναγιώτα: Blaise Pascal: Η έννοια της αγωνίας, εκδ."Έννοια", Αθήνα, 2006.
- Rogers, Ben, Πασκάλ. Εγκώμιο στη ματαιοδοξία. Μετάφρ. Ιφιγένεια Σταροπούλου, εκδ."Ενάλιος", Αθ. 2006.
- Καραγιάννης, Γεώργιος Στεφ., «Σκέψη καὶ πίστη . Παρατηρήσεις καὶ σκέψεις ἐπάνω στὴ ρήση τοῦ Pascal: "Le Pyrrhonisme sert à la réligion"» , Φιλοσοφία καὶ Παιδεία, 9-10 (1997), σσ. 34-36

2.5 Εξωτερικοί σύνδεσμοι

Κεφάλαιο 3

Πιερ ντε Φερμά

Ο **Πιερ ντε Φερμά** (γαλλ. Pierre de Fermat) (17 Αυγούστου 1601 - 12 Ιανουαρίου 1665) ήταν Γάλλος νομικός στο κοινοβούλιο της Τουλούζης και ερασιτέχνης μαθηματικός με μεγάλη συμβολή στην ανάπτυξη του απειροστικού λογισμού. Ειδικότερα είναι γνωστός για την ανακάλυψη μιας πρωτότυπης μεθόδου υπολογισμού των ελάχιστων και μέγιστων σημείων σε καμπύλες γραμμές, η οποία είναι ανάλογη με τον τότε ακόμα άγνωστο διαφορικό λογισμό.

Επίσης είναι γνωστός και για τις έρευνές του για στη θεωρία των αριθμών, την αναλυτική γεωμετρία, τη θεωρία πιθανοτήτων και την οπτική.

Κυρίως όμως είναι γνωστός για το **τελευταίο θεώρημα του Φερμά**, το οποίο περιέγραψε σε μια μικρή σημείωση στο βιβλίο *Αριθμητικά* του Διόφαντου.

3.1 Βιογραφία

Ο Φερμά γεννήθηκε στο Μπομόν ντε Λομάνι (Beaumont-de-Lomagne) της περιφέρειας Ταρν-ε-Γκαρόν του Νομού Μέσων Πυρηναίων (Midi-Pyrénées) στη νότια Γαλλία στις 17 Αυγούστου 1601 και ήταν βασκικής καταγωγής.[1] Ο πατέρας του, Ντομινίκ Φερμά, ήταν ευκατάστατος έμπορος δερμάτων και κατείχε το αξίωμα “second consul” στο "παλαιό καθεστώς" (ancien regime) της Γαλλίας, κυβερνητική θέση ισοδύναμη με του σημερινού δημάρχου. Ο Ντομινίκ νυμφεύτηκε δύο φορές, αρχικά τη Φρανσουάζ Καζενέβ (Françoise Cazeneuve) και στη συνέχεια την Κλερ ντε Λον (Claire de Long). Δεν είναι εξακριβωμένο ποια από τις δύο ήταν η μητέρα του Πιέρ, φαίνεται όμως πιθανότερο να ήταν η Κλερ ντε Λον.[2] Δεν είναι επίσης σαφής η χρονολογία γέννησής του, καθώς έχουν ανευρεθεί στα αρχεία της Μοντωμπάν και της γενέτειράς του δύο εγγραφές με το όνομα "Πιέρ Φερμά", η μία χρονολογούμενη το 1601 και η άλλη το 1607.[3]

Δεν είναι γνωστές πολλές λεπτομέρειες σχετικά με τα πρώτα στάδια της μόρφωσής του. Πιθανόν να έλαβε τη στοιχειώδη εκπαίδευση στο μοναστήρι των Φραγκισκανών “Grandsl ve” που βρισκόταν στην περιοχή της γενέτειράς του.[4][5]

Ολοκληρώνοντας τις βασικές σπουδές του γράφτηκε αρχικά στο Πανεπιστήμιο της Τουλούζης και στη συνέχεια στο Πανεπιστήμιο του Μπορντώ (περίπου το δεύτερο ήμισυ του 1620). Εκεί άρχισε το 1629 τις πρώτες του έρευνες επί των μαθηματικών, όταν έδωσε σε ένα μαθηματικό ένα αντίγραφο του *Plane Loci* του Απολλωνίου το οποίο είχε αποκαταστήσει. Την ίδια περίοδο, επίσης, συνέγραψε αρκετά κείμενα σχετικά με το μέγιστο και το ελάχιστο των συναρτήσεων, τα οποία έδωσε στον Ετιέν ντ' Εσπανιέ (Étienne d'Espagnet),[5] λάτρη των μαθηματικών και γιο του προέδρου του Κοινοβουλίου του Μπορντώ που είχε τα ίδια ενδιαφέροντα με αυτόν και είχε δημιουργήσει ένα μικρό κύκλο με τους Φιλόν (Philon) και Πραντ (Prades), τους οποίους μνημονεύει ο Φερμά στην αλληλογραφία του.[6]

Από το Μπορντώ μετακόμισε στην Ορλεάνη για να σπουδάσει Νομικά στο πανεπιστήμιο της πόλης. Λαμβάνοντας το πτυχίο του αγόρασε τον τίτλο του συμβούλου (conseiller)[7] στο Κοινοβούλιο της πόλης. Το 1631, έχοντας το επάγγελμα του δικηγόρου, το οποίο του εξασφάλιζε κοινωνική άνοδο αλλά και άνοιγε τους δρόμους της πολιτικής εξουσίας,[4] και κυβερνητικό αξίωμα άλλαξε το όνομά του από Πιέρ Φερμά σε Πιέρ ντε Φερμά. Το ίδιο έτος νυμφεύτηκε στο Μπωμόν (Beaumont) την τέταρτη εξαδέλφη του Λουίζ ντε Λον (Louise de Long), με την οποία απέκτησαν πέντε παιδιά: τον Κλεμάν-Σαμυέλ (Clément-Samuel), τον Ζαν (Jean), την Κλερ

(Claire), τη Λουίζ (Louise) και την Κατρίν (Catherine). Η οικογένεια Φερμά απολάμβανε μεγάλης εκτίμησης στην πόλη και, καθώς ο πεθερός του, ως ένας από τους παλαιότερους νομοθέτες ανήκε στην Αριστοκρατία, εντάχθηκε σε αυτήν και η οικογένεια Φερμά.[8]

Ο Φερμά χειριζόταν άψογα, εκτός από τα γαλλικά, τα λατινικά, τα Αρχαία ελληνικά, τα ισπανικά, τα ιταλικά και πιθανόν και τη βασκική διάλεκτο. Για το λόγο αυτό ήταν περιζήτητος για την απόδοση των κλασικών ελληνικών κειμένων. Παρά την ενασχόλησή του με τη μαθηματική επιστήμη, κράτησε για τον εαυτό του τον τίτλο του "ερασιτέχνη", ενώ παράλληλα κατάφερε να πετύχει την επιθυμητή αναγνώρισή του. Το γεγονός αυτό οδήγησε σε διαμάχες με συγχρόνους του μαθηματικούς, όπως ο Ρενέ Ντεκάρτ (Καρτέσιος), ενώ είχε αναπτύξει φιλία με τον Μπλεζ Πασκάλ[9]

Ο Φερμά απεβίωσε στις 12 Ιανουαρίου 1665 στην πόλη Καστρ (Castres).[1]

3.2 Το έργο του

Η πρωτοπόρος εργασία του Φερμά στην Αναλυτική Γεωμετρία κυκλοφόρησε σε χειρόγραφη μορφή το 1636, πριν ο Ντεκάρτ κυκλοφορήσει την περίφημη *Γεωμετρία* (La Géométrie) του. Το χειρόγραφο εκδόθηκε μετά τον θάνατο του Φερμά, το 1679, σε συμπίλημα υπό τον τίτλο “Varia opera mathematica” (ποικίλα μαθηματικά έργα) υπό τον τίτλο *Ad Locos Planos et Solidos Isagoge* (Εισαγωγή στους επίπεδους και στερεούς (γεωμετρικούς) τόπους).[10]

Στο έργο του *In Methodus ad disquirendam maximam et minima and in De tangentibus linearum curvarum* ο Φερμά αναπτύσσει μια μέθοδο προσδιορισμού των ελαχίστων, μεγίστων και εφαπτομένων σε καμπύλες ποικίλων συναρτήσεων, ισοδύναμη με αυτή του διαφορικού λογισμού[11] Με αυτές τις εργασίες ο Φερμά επινοεί μια τεχνική για τον εντοπισμό του κέντρου βάρους πολλών επίπεδων και στερεών σωμάτων και οδήγησε σε περισσότερες αναλύσεις επί των ολοκληρωμάτων.

Σημαντική συμβολή είχε επίσης στον ολοκληρωτικό λογισμό, όπου με ευφυές τέχνασμα κατόρθωσε να επινοήσει τύπο υπολογισμού του ολοκληρώματος ανάγοντάς το σε άθροισμα όρων γεωμετρικής προόδου. Ο τύπος αυτός πιθανότατα χρησίμευσε τόσο στον Νεύτωνα όσο και στον Λάιμπνιτς οι οποίοι, ανεξάρτητα ο ένας από τον άλλο, παρουσίασαν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού.[12]

Στη Θεωρία αριθμών ο Φερμά μελέτησε την ειδική περίπτωση της διοφαντικής εξίσωσης που αποκλήθηκε "εξίσωση του Πελ":

$$x^2 - ny^2 = 1$$

τους τέλειους αριθμούς, τους "φιλικούς" (amicable) αριθμούς και τους αριθμούς που θα γίνουν αργότερα γνωστοί ως "αριθμοί του Φερμά":

$$F_n = 2^{2^n} + 1$$

όπου n είναι μη αρνητικός ακέραιος

Ενώ ερευνούσε τους τέλειους αριθμούς, επινόησε και το αντίστοιχο θεώρημα. Επινόησε επίσης μέθοδο παραγοντοποίησης (μέθοδος παραγοντοποίησης Φερμά) και την τεχνική της "κατάβασης εις άπειρο", μια ειδική περίπτωση της απαγωγής σε άτοπο, την οποία χρησιμοποίησε για να αποδείξει το Τελευταίο Θεώρημα για n=4.

Αν και ο ίδιος ισχυριζόταν ότι είχε αποδείξει όλα του τα θεωρήματα, ελάχιστες καταγραφές αυτών των αποδείξεων. Πολλοί μαθηματικοί, ανάμεσά τους και ο Καρλ Φρίντριχ Γκάους (*Carl Friedrich Gauss*) αμφέβαλλαν για αρκετούς από τους ισχυρισμούς του, ειδικά αν λάμβανε κανείς υπόψη τόσο τη δυσκολία ορισμένων από τα προβλήματα που αντιμετώπισε όσο και τα περιορισμένα μαθηματικά "εργαλεία" που ήταν γνωστά στην εποχή του.

Το περίφημο θεώρημά του ανακαλύφθηκε από τον γιο του στα περιθώρια μιας έκδοσης του Διόφαντου, με την παρατήρηση ότι το περιθώριο ήταν πολύ μικρό για να χωρέσει και την απόδειξή του. Το θεώρημα αποδείχθηκε μόλις το 1994, με μαθηματικές τεχνικές άγνωστες στον Φερμά.

Μολονότι μελέτησε πολύ προσεκτικά και εμπνεύστηκε από την εργασία του Διόφαντου, ο Φερμά δημιούργησε τη δική του "σχολή" επί του θέματος. Ο Διόφαντος ήταν ικανοποιημένος αν έβρισκε μια μόνο λύση στις εξισώσεις του, ακόμη κι αν αυτή ήταν κλασματική (και άρα μη επιθυμητή). Ο Φερμά ενδιαφέρθηκε μόνο για τις ακέραιες λύσεις στις διοφαντικές εξισώσεις του και ερεύνησε όλες τις πιθανές γενικές λύσεις. Συχνά αποδείκνυε ότι ορισμένες εξισώσεις δεν είχαν λύση, κάτι που προκαλούσε σύγχυση στους συγχρόνους του.

Μέσω της αλληλογραφίας του με τον Πασκάλ, έθεσαν, το 1664, τα βασικά θεμέλια της θεωρίας των πιθανοτήτων. Από αυτή τη σύντομη αλλά πολύ παραγωγική συνεργασία επί του προβλήματος των ακρότατων, θεωρούνται σήμερα συνδημιουργοί της θεωρίας των πιθανοτήτων.[5] Στον Φερμά επίσης αποδίδεται και η πρώτος ακριβής υπολογισμός πιθανότητας: Ένας επαγγελματίας παίκτης τον ρώτησε γιατί αν στοιχημάτιζε πως σε τέσσερις ρίψεις ενός ζαριού θα ερχόταν μια φορά τουλάχιστον το 6 κέρδιζε σε βάθος χρόνου, ενώ αν στοιχημάτιζε ότι θα έρχονταν τουλάχιστον μια φορά "εξάρες" σε 24 ταυτόχρονες ρίψεις δύο ζαριών έχανε. Ο Φερμά απέδειξε ότι αυτός ήταν ο κανόνας βάσει των μαθηματικών.[13]

3.2.1 Αποτίμηση του έργου του

Μαζί με τον Ρενέ Ντεκάρτ ο Φερμά θεωρείται ένας από τους δύο κορυφαίους μαθηματικούς του πρώτου ημίσεος του 17ου αιώνα. Σύμφωνα με τον συγγραφέα Πίτερ Μπερνστάιν (Peter L. Bernstein) στο βιβλίο του *Against the Gods* (Ενάντια στους Θεούς) ο Φερμά ήταν μαθηματικός σπάνιας νοητικής δύναμης: Αναδείχτηκε σε θεμελιωτή της Αναλυτικής Γεωμετρίας, συνέβαλε στην αρχική διαμόρφωση του ολοκληρωτικού λογισμού έκανε έρευνες επί του "βάρους της Γης" και εργάστηκε επί της Οπτικής και της διάθλασης του φωτός. Στην εκτεταμένη αλληλογραφία του με τον Πασκάλ θέτουν από κοινού τη βάση της θεωρίας πιθανοτήτων. Όμως, το σημαντικότερο επίτευγμά του σημειώνεται στη θεωρία των αριθμών.[14]

3.3 Παραπομπές

[1] “Pierre de Fermat.” Encyclopædia Britannica Online, 2011. Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[2] Google Books: Michel Serfati,Dominique Descotes, *Mathématiciens français du XVIIe siècle: Descartes, Fermat, Pascal*, Presses Univ Blaise Pascal, 2008, σελ.171 - 172. Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[3] Klaus Barner, *How old did Fermat become? στο RefDoc του Εθνικού Ιδρύματος Ερευνών Γαλλίας (CNRS)*. Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[4] Yogita Chellani, *Pierre de Fermat*, Term Paper, History of Mathematics, Rutgers School of Art and Sciences. Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[5] School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[6] GAP - Groups, Algorithms, Programming - a System for Computational Discrete Algebra, Biography of Jean Beaugrand

[7] Αντίστοιχο του νομοθέτη στο τότε Κοινοβούλιο

[8] Google Books: Émerand Forestié, *Biographie de Tarn-et-Garonne: études historiques et bibliographiques*, Forestié neveu, 1860, σελ 476-478 Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[9] Walter William Rouse Ball (1888), *A short account of the history of mathematics*, General Books LLC. ISBN 978-1443294874

[10] Gullberg, Jan. *Mathematics from the birth of numbers*, W. W. Norton & Company, ISBN 978-0393040029 σελ. 548.

[11] Dana Pellegrino, *Pierre de Fermat*, Term Paper, 2000, History of Mathematics, Rutgers School of Art and Sciences. Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[12] Jaume Paradís, Pelegrí Viader, Josep Pla *Fermat’s Treatise on Quadrature: A New Reading* στο Social Science Research Network Ανακτήθηκε στις 12-08-2011

[13] Eves, Howard, *An Introduction to the History of Mathematics*, Saunders College Publishing, Fort Worth, Texas, 1990

[14] Bernstein, Peter L., *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*, John Wiley & Sons, 1996 σελ. 61-62. ISBN 9780471121046

3.4 Εξωτερικοί σύνδεσμοι

Κεφάλαιο 4

Τελευταίο θεώρημα του Φερμά

Στη θεωρία αριθμών, το **τελευταίο θεώρημα του Φερμά** (ορισμένες φορές ονομάζεται **Υπόθεση του Φερμά**, κυρίως σε παλαιότερα κείμενα) διατυπώνεται ως εξής: τρεις θετικοί ακέραιοι αριθμοί a, b, και c δεν μπορούν να ικανοποιήσουν την εξίσωση $a^n + b^n = c^n$ για κάθε ακέραιο αριθμό n μεγαλύτερο από το δύο. Επομένως, χωρίς τη χρήση μαθηματικών συμβόλων μπορεί να εκφραστεί: *Είναι αδύνατον να χωρίσεις οποιαδήποτε δύναμη μεγαλύτερη της δεύτερης σε δύο ίδιες δυνάμεις* Το θεώρημα αυτό διατυπώθηκε πρώτη φορά το 1637 από τον Φερμά, με τη μορφή χειρόγραφης σημείωσης σε ένα βιβλίο (συγκεκριμένα στα Αριθμητικά του Διόφαντου), όπου ο ίδιος ισχυρίστηκε ότι έχει την απόδειξη του θεωρήματος αλλά είναι τόσο μεγάλη που δεν χωρούσε στη σημείωση. Καμία επιτυχής απόδειξη δεν δημοσιεύθηκε μέχρι το 1995, παρά τις προσπάθειες των αμέτρητων μαθηματικών κατά τα 358 χρόνια που μεσολάβησαν. Το άλυτο αυτό πρόβλημα συνδέεται άμεσα με την πρόοδο της αλγεβρικής θεωρίας αριθμών το 19ο αιώνα. Είναι ένα από τα πιο γνωστά θεωρήματα στην ιστορία των μαθηματικών και πριν την απόδειξη του 1995 από τους μαθηματικούς Άντριου Γουάιλς και Ρίτσαρντ Τέιλορ βρισκόταν στο *Βιβλίο Γκίνες* ως το "πιο δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα".

4.1 Επισκόπηση

4.1.1 Το πρόβλημα

Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά (γνωστό με τον τίτλο αυτό ιστορικά, αν και τεχνικά επρόκειτο για μια εικασία ή για αναπόδεικτες εικασίες, μέχρι να αποδειχθεί το 1995) αποτελούσε ένα άλυτο αίνιγμα στα μαθηματικά για πάνω από τρεις αιώνες. Το θεώρημα μόνο του είναι μια απατηλά απλή διατύπωση μέσα στα μαθηματικά, ενώ ο Φερμά περίφημα είχε δηλώσει ότι το πρόβλημα είχε αποδείξει άρα λύθηκε περίπου 1637. Η αξίωσή του ανακαλύφθηκε περίπου 30 χρόνια αργότερα, μετά το θάνατό του, ως μία ξεκάθαρη δήλωση στο περιθώριο ενός βιβλίου, αλλά ο Φερμά πέθανε χωρίς να αφήσει καμία απόδειξη όσον αφορά την αξίωση του.

Η αξίωση αυτή έγινε τελικά ένα από τα πιο διάσημα άλυτα προβλήματα των μαθηματικών. Οι προσπάθειες που έγιναν για να αποδειχθεί κατά τη διάρκεια του χρόνου που ακολούθησε, μέχρι τη δημοσίευση της επιτυχημένης απόδειξης, προκάλεσε ουσιαστική ανάπτυξη στην θεωρία αριθμών και με την πάροδο του χρόνου το Τελευταίο θεώρημα του Φερμά αποκτήσει θρυλική εξέχουσα θέση ως ένα από τα πιο δημοφιλή άλυτα προβλήματα στα μαθηματικά. Βασίζεται στο γνωστό τύπο του ("Πυθαγόρειου Θεωρήματος") για την υποτείνουσα και τις δύο άλλες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου που ανακαλύφθηκε από τον αρχαίο Έλληνα μαθηματικό Πυθαγόρα : $a^2 + b^2 = c^2$

Σύμφωνα με τα δεδομένα αυτά, η εξίσωση έχει ένα άπειρο πλήθος ακεραίων λύσεων, που αντιστοιχούν στις πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου. Ο Φερμά ισχυρίστηκε ότι είχε μια απόδειξη ότι αυτό το θεώρημα δεν έχει λύσεις κάποιον φυσικό αριθμό (ή «ακέραιο») για κάθε ακέραιο εκθέτη μεγαλύτερο από το 2. Με άλλα λόγια αν η εξίσωση $a^2 + b^2 = c^2$ έχει άπειρο πλήθος λύσεων, οι παρόμοιες εξισώσεις

$$a^3 + b^3 = c^3$$
$$a^4 + b^4 = c^4$$
$$a^n + b^n = c^n$$

Πιέρ ντε Φερμά

για οποιονδήποτε άλλο εκθέτη n μεγαλύτερο του 2 δεν έχει λύσεις. Ο Φερμά δεν άφησε καμία απόδειξη της εικασίας του για όλα τα n>2, εκτός από την ειδική περίπτωση για n=4.

Χρησιμοποιώντας πιο επίσημη μαθηματική σημειογραφία, το τελευταίο θεώρημα του Φερμά μπορεί να διατυπωθεί ως εξής:

> *Αν ένας ακέραιος n είναι μεγαλύτερος του 2, τότε η εξίσωση*

$x^n + y^n = z^n$, *όπου x, y, και z θετικοί ακέραιοι*

δεν έχει λύση.

Επειδή το συγκεκριμένο πρόβλημα γίνεται πολύ εύκολα κατανοητό από τον καθένα (ως προς τη διατύπωσή του), έχουν δημιουργηθεί κατά καιρούς οι περισσότερες λανθασμένες αποδείξεις από οποιοδήποτε άλλο πρόβλημα στην ιστορία των μαθηματικών. Όλα τα θεωρήματα που είχαν προταθεί από τον Φερμά αποδείχτηκαν, είτε με δικές του αποδείξεις, είτε με αποδείξεις άλλων μαθηματικών, στους επόμενους δύο αιώνες που ακολούθησαν τις προτάσεις. Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά δεν ήταν το τελευταίο που διατύπωσε, αλλά το τελευταίο που αποδείχτηκε. Υπάρχουν πολλές εξισώσεις που έχουν μορφή παρόμοια με αυτή του τελευταίου θεωρήματος του Φερμά. Ένα παράδειγμα είναι το εξής:

Υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι αριθμοί x , y , και z , τέτοιοι ώστε $x^n + y^n = z^m$, όπου n και m πρώτοι μεταξύ τους φυσικοί αριθμοί.

4.1.2 Μεταγενέστερες εξελίξεις και η απόδειξη του θεωρήματος

Με την ειδική περίπτωση n = 4 αποδεδειγμένη, το πρόβλημα ήταν να αποδειχθεί το θεώρημα για εκθέτες n, οι οποίοι είναι πρώτοι αριθμοί (ο περιορισμός αυτός θεωρείται τετριμμένος για να αποδεχθεί αφού: αν n δεν είναι πρώτος αριθμός τότε θα ήταν δυνατό να γραφεί με τη μορφή n = PQ, όπου P είναι ένας πρώτος αριθμός, και στη συνέχεια ισχύει $a^n = a^{P \cdot Q} = (a^Q)^P$ για καθέναν από τους a,b και c και μια ισοδύναμη λύση, θα μπορούσε να υπάρχει για μία μικρότερη πρώτη δύναμη. Κατά τη διάρκεια των δύο επόμενων αιώνων (1637-1839), η εικασία έχει αποδειχθεί μόνο για τους πρώτους 3, 5, και 7, αν και η Σοφί Ζερμαίν καινοτόμησε και κατόρθωσε να προσεγγίσει μια απόδειξη που θα αφορούσε μια ολόκληρη κατηγορία των πρώτων αριθμών. Στα μέσα του 19ου αιώνα, ο Ερνστ Κούμερ επέκτεινε την απόδειξη της Ζερμαίν και, επίσης, απέδειξε το θεώρημα για όλες κανονικούς πρώτους αριθμούς, αφήνοντας τους ακανόνιστους να αναλυθούν μεμονωμένα. Με βάση τις εργασίες του Κούμερ και τη χρήση εξελιγμένων μελετών με τη βοήθεια υπολογιστών, άλλοι μαθηματικοί ήταν σε θέση να επεκτείνουν την απόδειξη για να καλύψουν όλους τους πρώτους εκθέτες μέχρι τέσσερα εκατομμύρια, αλλά μια απόδειξη για όλους τους εκθέτες ήταν απρόσιτη εκείνη την περίοδο για τη μαθηματική κοινότητα (πράγμα που σημαίνει ότι οι μαθηματικοί γενικά θεωρούν μια απόδειξη μπορεί να είναι είτε αδύνατη, ή στην καλύτερη περίπτωση εξαιρετικά δύσκολη, ή δεν είναι εφικτή με τις σημερινές γνώσεις).

Η απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά στο σύνολό της, για όλα τα n, τελικά επιτεύχθηκε, μετά από 358 χρόνια, από τον Άντριου Γουάιλς, το 1995, ένα επίτευγμα για το οποίο τιμήθηκε και έλαβε πολλά βραβεία. Η λύση ήρθε με έμμεσο τρόπο, από έναν εντελώς διαφορετικό τομέα των μαθηματικών.

Περίπου το 1955 οι Ιάπωνες μαθηματικοί Γκόρο Σιμούρα και Γιουτάκα Τανιγιάμα διατύπωσαν την εικασία ύπαρξης σχέσης μεταξύ των ελλειπτικών καμπυλών και των modular forms, δύο εντελώς διαφορετικών περιοχών των μαθηματικών. Η αξίωση αυτή που έμεινε γνωστή ως Τανιγιάμα-Σιμούρα-Γουάιλς εικασία, και τελικά ως θεώρημα των modular forms, το οποίο εντάσσεται στον τομέα της μιγαδικής ανάλυσης, θεωρούνταν ανεξάρτητη, χωρίς προφανή σύνδεση με το Τελευταίο θεώρημα του Φερμά. Είχε ευρέως θεωρηθεί ως σπουδαίο μαθηματικό πρόβλημα, αλλά ήταν (όπως και εξίσωση του Φερμά) εντελώς απρόσιτο στην απόδειξη του.

Το 1984, ο Ζέραντ Φρέι παρατήρησε μια προφανή σχέση μεταξύ του θεωρήματος των modular forms και του Τελευταίου θεώρηματος του Φερμά. Αυτή η πιθανή σχέση επιβεβαιώθηκε δύο χρόνια αργότερα από τον Κεν Ρίμπετ. Ο Άγγλος μαθηματικός Άντριου Γουάιλς, ο οποίος είχε γοητευθεί από τα 10 του χρόνια με το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά, αποφάσισε ακούγοντας αυτό, να προσπαθήσει και να αποδείξει το θεώρημα των modular forms, πιστεύοντας ότι επρόκειτο για έναν τρόπο ώστε να αποδείξει το Τελευταίο θεώρημα του Φερμά. Το 1993, μετά από έξι χρόνια, όπου εργάζεται κρυφά πάνω στο πρόβλημα, ο Γουάιλς κατόρθωσε να αποδείξει αρκετά για το θεώρημα των modular forms ώστε να φθάσει στη λύση του Τελευταίου θεωρήματος του Φερμά. Η απόδειξη του Γουάιλς ήταν τεράστια σε μέγεθος και σε πεδίο εφαρμογής. Ένα ελάττωμα ανακαλύφθηκε σε ένα τμήμα του αρχικού εγγράφου του κατά τη διάρκεια της αξιολόγησης από ομότιμους και απαιτείται ένα επιπλέον έτος και η συνεργασία του με έναν παλαιότερο φοιτητή, τον Ρίτσαρντ Τέιλορ για την διόρθωσή του. Ως αποτέλεσμα η τελική απόδειξη το 1995 συνοδεύτηκε από ένα δεύτερο, μικρότερο έγγραφο για την επίλυση του προβλήματος αυτού. Το επίτευγμα του Γουάιλς είχε αναφερθεί ευρέως στον Τύπο, και διαδόθηκε σε βιβλία και τηλεοπτικά προγράμματα. Τα υπόλοιπα μέρη του θεωρήματος των modular forms στη συνέχεια αποδείχθηκαν από άλλους μαθηματικούς, με βάση τις εργασίες του Γουάιλς, μεταξύ 1996 και 2001.

Άντριου Γουάιλς

4.2 Μαθηματική αναδρομή

4.2.1 Πυθαγόρας και Διόφαντος

Πυθαγόρειες τριάδες

Μια Πυθαγόρεια τριάδα, το όνομά της οποίας προέρχεται από τον αρχαίο Έλληνα Πυθαγόρα, είναι ένα σύνολο τριών ακεραίων (*a, b, c*) που ικανοποιούν την εξίσωση του Φερμά στην ειδική περίπτωση ($n = 2$).[1]

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Παραδείγματα πυθαγόρειων τριάδων είναι (3, 4, 5) και (5, 12, 13). Υπάρχουν άπειρα παραδείγματα τέτοιων τριάδων[2] και οι μέθοδοι παραγωγής τέτοιων τριάδων μελετήθηκαν από πολλούς πολιτισμούς ξεκινώντας από τους Βαβυλώνιους[3] και αργότερα από Έλληνες, Γιαπωνέζους και Ινδούς μαθηματικούς.[4] Το διαχρονικό ενδιαφέρον για τις πυθαγόρειες τριάδες συνδέεται στενά με το Πυθαγόρειο θεώρημα,[5] στην παραγωγική μορφή τους, αφού αναφέρεται ότι ένα τρίγωνο με πλευρές a, b, και c έχει μία ορθή γωνία μεταξύ των a και b πλευρών όταν οι αριθμοί προέρχονται από πυθαγόρειες τριάδες. Τα ορθογώνια τρίγωνα εμφανίζουν πολλές πρακτικές εφαρμογές όπως στην τοπογραφία, στην ξυλουργία, στην τοιχοποιία και στις κατασκευές. Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά είναι μια επέκταση αυτού του προβλήματος σε υψηλότερες δυνάμεις, δηλώνοντας ότι δεν υπάρχει λύση όταν ο εκθέτης 2 αντικαθίσταται από οποιοδήποτε μεγαλύτερο ακέραιο αριθμό.

Διοφαντικές εξισώσεις

Η εξίσωση του Φερμά, $x^n + y^n = z^n$ με θετικές ακέραιες λύσεις είναι ένα παράδειγμα διοφαντικής εξίσωσης,[6] η οποία χαρακτηρίστηκε με αυτή την ονομασία τον 3ο αιώνα από τον Αλεξανδρινό μαθηματικό Διόφαντο, ο οποίος τις μελέτησε και κατόρθωσε να αναπτύξει την μέθοδο εύρεσης λύσεων για κάποια είδη αυτών των εξισώσεων. Ένα τυπικό διοφαντικό πρόβλημα είναι να βρεθούν δύο ακέραιοι αριθμοί x και y έτσι ώστε το άθροισμά τους, και το άθροισμα των τετραγώνων τους, να ισούνται με δύο δοθέντες αριθμούς A και B, αντίστοιχα:

$$A = x + y$$

$$B = x^2 + y^2.$$

Σημαντικό έργο του Διόφαντου είναι το *Αριθμητικά*, εκ του οποίου μόνο ένα μέρος έχει επιβιώσει.[7] Ο Φερμά εμπνεύστηκε την εικασία του τελευταίου θεωρήματός του διαβάζοντας μια νέα έκδοση του *Αριθμητικά*,[8] η οποία μεταφράστηκε στα λατινικά και δημοσιεύτηκε το 1621 από τον Κλαούντ Μπακέτ.[9]

Οι Διοφαντικές εξισώσεις μελετούνται εδώ και χιλιάδες χρόνια. Για παράδειγμα, οι λύσεις για την τετραγωνική διοφαντική εξίσωση $x^2 + y^2 = z^2$ δόθηκε από τις Πυθαγόρειες τριάδες, στην πραγματικότητα λύθηκε από τους Βαβυλώνιους περίπου το 1800 π.Χ.[10] Λύσεις για τις γραμμικές Διοφαντικές εξισώσεις όπως η $26x + 65y = 13$, μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο του Ευκλείδη (5ος αιώνας π.Χ.).[11] Πολλές διοφαντικές εξισώσεις έχουν παρόμοια μορφή με αυτήν των εξισώσεων του τελευταίου θεωρήματος του Φερμά από την άποψη της Άλγεβρας, υπό την έννοια ότι δεν έχουν αντίστοιχους όρους με την ανάμειξη δύο γραμμάτων, χωρίς να μοιράζονται τις συγκεκριμένες ιδιότητες. Για παράδειγμα, είναι γνωστό ότι υπάρχουν άπειροι θετικοί ακέραιοι x, y, και z τέτοιοι ώστε $x^n + y^n = z^m$ όπου n και m φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους.[note 1]

4.2.2 Εικασία του Φερμά

Το Πρόβλημα II.8 του *Αριθμητικά*, θέτει το ερώτημα για τον τρόπο με τον οποίο το τετράγωνο ενός δοσμένου αριθμού μπορεί να διαιρεθεί σε δύο άλλα τετράγωνα, με άλλα λόγια για έναν ρητό αριθμό k, βρείτε τους ρητούς αριθμούς u και v ώστε $k^2 = u^2 + v^2$. Ο Διόφαντος απέδειξε ότι η παραπάνω εξίσωση λύνεται όταν ο $k = 4$ (η λύση είναι $u = 16/5$ και $v = 12/5$).[12]

Γύρω στο 1637, ο Φερμά έγραψε το τελευταίο του θεώρημα ως σημείωση στο "Αριθμητικά" δίπλα στο πρόβλημα του αθροίσματος των τετραγώνων του Διόφαντου.[13]

Δεν είναι γνωστό εάν ο Φερμά είχε βρει πραγματικά μια έγκυρη απόδειξη. Έχει επιβιώσει μόνο η απόδειξη του για την περίπτωση $n = 4$.[14] Ο Φερμά θέτει τις υποθέσεις των περιπτώσεων $n = 4$ και $n = 3$ ως προκλήσεις για τους μαθηματικούς ανταποκριτές του όπως ο Μαρίν Μερσέν, ο Μπλεζ Πασκάλ και ο Τζον Γουάλις.[15] Ωστόσο, τα τελευταία τριάντα χρόνια της ζωής του, ο Φερμά δεν έγραψε ξανά για την "πραγματικά θαυμάσια" απόδειξή του στην γενική της περίπτωση.

Μετά το θάνατο του Φερμά, ο γιος του Κλεμάντ-Σάμουελ Φερμά παρήγαγε μια νέα έκδοση του βιβλίου, το 1670, επαυξημένη με τα σχόλια του πατέρα του.[16] Η σημείωση στο περιθώριο έγινε γνωστή ως *τελευταίο θεώρημα του Φερμά*[17] αφού πρόκειται για το θεώρημα του Φερμά που αποδείχθηκε τελευταίο.[18]

4.2.3 Οι αποδείξεις για συγκεκριμένους εκθέτες

Μόνο μία μαθηματική απόδειξη για το θεώρημα από τον Φερμά έχει διασωθεί, στην οποία ο Φερμά χρησιμοποιεί την τεχνική της άπειρης καθόδου για να δείξει ότι η περιοχή ενός ορθογωνίου τριγώνου με ακέραιες πλευρές δεν μπορεί ποτέ να ισούται με το τετράγωνο του ακεραίου.[19] Η απόδειξη του είναι ισοδύναμη με την απόδειξη ότι η εξίσωση

$$x^4 - y^4 = z^2$$

δεν έχει πρωτόγονες λύσεις σε ακέραιους αριθμούς. Με τη σειρά του, αυτό αποδεικνύει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά για την περίπτωση n=4, δεδομένου ότι η εξίσωση $a^4 + b^4 = c^4$ μπορεί να γραφτεί ως $c^4 - b^4 = (a^2)^2$.

Εναλλακτικές αποδείξεις της υπόθεσης $n = 4$ αναπτύχθηκαν αργότερα από τους[20] Frénicle de Bessy (1676),[21] Λέοναρντ Όιλερ (1738),[22] Κάσλερ (1802)[23] Πήτερ Μπάρλοου (1811),[24] Αντριάν Μαρί Λαζάντρ (1830)[25] Schopis (1825),[26] Τερκέμ (1846)[27] Τζόζεφ Λουί Φρανσουά Μπερτράντ (1851) [28] Βίκτορ Λεμπέσγκ (1853, 1859, 1862),[29][30][31] Θεοφίλ Πεπίν (1883),[32] Tafelmacher (1893),[33] Ντέιβιντ Χίλμπερτ (1897),[34] Μπέντζ (1901),[35] Gambioli (1901),[36] Λεοπόλδ Κρόνεκερ (1901),[37] Μπάνγκ (1905),[38] Σόμμερ (1907),[39] Μποτάρρι (1908),[40] Κάρελ Ρίκλικ (1910),[41] Νατζορν (1912),[42] Ρόμπερτ Κάρμιχαλ (1913),[43] Χάνκονκ (1931),[44] και Βράνκο (1966).[45]

Μετά την απόδειξη του Φερμά για την περίπτωση $n = 4$, η γενική υπόθεση για όλα τα n απαιτεί μόνο ότι το θεώρημα πρέπει να καθοριστεί για όλους τους περιττούς πρώτους εκθέτες.[46] Με άλλα λόγια ήταν απαραίτητο να αποδείξει μόνον ότι η εξίσωση $a^n + b^n = c^n$ δεν έχει ακέραιες λύσεις (a, b, c) όταν n είναι ένας περιττός πρώτος αριθμός. Αυτό προκύπτει επειδή μία λύση (a, b, c) για ένα δοσμένο n είναι ισοδύναμη με μια λύση για όλους τους παράγοντες του n. Για παράδειγμα, ο n παραγοντοποιείται από τους d και e $n = de$. Η γενική εξίσωση είναι

$$a^n + b^n = c^n$$

συνεπάγεται ότι (a^d, b^d, c^d) είναι μία λύση για έναν εκθέτη e.

$$(a^d)^e + (b^d)^e = (c^d)^e.$$

Για να αποδειχθεί ότι η εξίσωση του Φερμά δεν έχει λύσεις για $n > 2$ αρκεί να αποδειχθεί ότι δεν έχει λύσεις για τουλάχιστον έναν πρώτο παράγοντα του κάθε n. Όλοι οι ακέραιοι $n > 2$ περιέχουν έναν παράγοντα του 4, ή ένα περιττό πρώτο αριθμό, ή και τα δύο. Ως εκ τούτου, το τελευταίο θεώρημα του Φερμά μπορεί να αποδειχθεί για όλους τους n εάν μπορεί να αποδειχθεί για $n = 4$ και για όλους τους περιττούς πρώτους p.

Σοφί Ζερμαίν

Στις αρχές του 19ου αιώνα, η Σοφί Ζερμαίν ανέπτυξε διάφορες νέες προσεγγίσεις για να αποδείξει το "Τελευταίο θεώρημα του Φερμά" για όλους εκθέτες.[47] Πρώτα, όρισε ένα σύνολο βοηθητικών πρώτων θ τους οποίους κατασκεύασε από τον πρώτο εκθέτη p από την εξίσωση $\theta = 2hp+1$, όπου h είναι οποιοσδήποτε ακέραιος που δεν διαιρείται με το τρία. Έδειξε ότι, αν ένας μη ακέραιος p υψωθεί στην p-οστή δύναμη προκύπτει υπόλοιπο θ, τότε το θ πρέπει να διαιρεί το γινόμενο xyz. Στόχος της ήταν να χρησιμοποιήσει τη μαθηματική επαγωγή για να αποδείξει ότι, για κάθε δεδομένο p, απείρως πολλοί βοηθητικοί πρώτοι θ ικανοποιούν την κατάσταση της μη συνέχειας και διαιρούν το γινόμενο xyz, δεδομένου ότι το γινόμενο xyz μπορεί να έχει το πολύ ένα πεπερασμένο αριθμό πρώτων παραγόντων, μια τέτοια απόδειξη θα μπορούσε να είχε καθιερώσει το Τελευταίο θεώρημα του Φερμά. Αν και ανέπτυξε πολλές τεχνικές για τον καθορισμό της κατάστασης της μη συνέχειας, δεν πέτυχε τον στρατηγικό στόχο της. Εργάστηκε επίσης ώστε να καθιερωθούν χαμηλότερα όρια για το μέγεθος των λύσεων της εξίσωσης του Φερμά για έναν δεδομένο εκθέτη p, μια τροποποιημένη έκδοση του οποίου δόθηκε στη δημοσιότητα από την Αντριάν Μαρί Λεζάντρ. Ως πόρισμα αυτής της τελευταίας εργασίας, απέδειξε το θεώρημα της Σοφί Ζερμαίν, η οποία επιβεβαίωσε την πρώτη περίπτωση του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά (δηλαδή, στην περίπτωση κατά την οποία το p δεν διαιρεί το xyz) για κάθε περιττό πρώτο εκθέτη λιγότερο από 100.[47][48] Η Ζερμαίν προσπάθησε ανεπιτυχώς να αποδείξει την πρώτη περίπτωση του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά για όλους τους εκθέτες, ειδικά για $n = 2p$ το οποίο αποδείχθηκε από τον Γκάι Τερζανιάν το 1977.[49] Το 1985, ο Λεονάρντ Άντμαν, ο Ρότζερ Χεθ-Μράουν και ο Έτιεν Φουβριέ απέδειξαν ότι η πρώτη περίπτωση του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά ισχύει για απείρως πολλούς περιττούς πρώτους p.[50]

Ο Ερνστ Κάμμερ και η θεωρία των ιδανικών

Το 1847, Γκάμπριελ Λαμέ παρουσίασε μια απόδειξη για το τελευταίο θεώρημα του Φερμά βασισμένη στους παράγοντες της εξίσωσης $x^p + y^p = z^p$ οι οποίοι ανήκουν στους μιγαδικούς αριθμούς, και συγκεκριμένα το κυκλοτομικό πεδίο με βάση τις ρίζες του αριθμού 1. Ωστόσο, η απόδειξή του απέτυχε, επειδή θεώρησε εσφαλμένα ότι τέτοιοι πολύπλοκοι αριθμοί μπορούν να συνυπολογιστούν μοναδικά, παρόμοια με ακέραιους αριθμούς. Το κενό αυτό επισημάνθηκε αμέσως από τον Τζόζεφ Λούιβιγ, ο οποίος διαβάσε αργότερα μια εργασία που έδειχνε αυτή την αποτυχία της μοναδικής παραγοντοποίησης, που γράφτηκε από τον Ερνστ Κάμμερ. Ο Κάμμερ όρισε στο δικό του έργο το κατά πόσον το κυκλοτομικό πεδίο θα μπορούσε να γενικευθεί συμπεριλαμβάνοντας νέους πρώτους αριθμούς, έτσι ώστε η μοναδική παραγοντοποίησης αποκαταστάθηκε. Πέτυχε στο έργο αυτό από την ανάπτυξη των ιδανικών αριθμών. Χρησιμοποιώντας τη γενική προσέγγιση που περιγράφεται από τον Λαμέ, ο Κάμμερ απέδειξε και τις δύο υποθέσεις του τελευταίου θεωρήματος του Φερμά για όλους τους κανονικούς πρώτους αριθμούς. Ωστόσο, δεν μπορούσε να αποδείξει το θεώρημα για τους μη κανονικούς πρώτους αριθμούς που συμβαίνουν περίπου στο 39% τη φορά, οι μόνοι μη κανονικοί κάτω από 100 είναι 37, 59 και 67.

Εικασία του Μόρντελ

Στη δεκαετία του 1920, ο Λουί Μόρντελ θέτει μια εικασία που συνεπάγεται ότι η εξίσωση του Φερμά έχει το πολύ έναν πεπερασμένο αριθμό μη τετριμμένων πρώτων ακέραιων λύσεων, αν ο εκθέτης n είναι μεγαλύτερο από δύο.[51] Αυτή η υπόθεση αποδείχθηκε το 1983 από τον Ζερ Φόλτινγκ,[52] και σήμερα είναι γνωστή ως θεώρημα Faltings.

Υπολογιστικές μελέτες

Στο δεύτερο μισό του 20ου αιώνα, οι υπολογιστικές μέθοδοι που είχαν χρησιμοποιήθηκαν για την επέκταση της προσέγγισης του Κάμμερ για τους μη κανονικούς πρώτους αριθμούς. Το 1954, ο Χάρι Βαννtιβερ χρησιμοποίησε ένα SWAC υπολογιστή για να αποδείξει το τελευταίο θεώρημα του Φερμά για όλους τους πρώτους μέχρι τον 2521.[53] Μέχρι το 1978 , ο Samuel Wagstaff το είχε επεκτείνει σε όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το 125.000.[54] Μέχρι το 1993, το τελευταίο θεώρημα του Φερμά είχε αποδειχθεί για όλους τους πρώτους αριθμούς που είναι μικρότεροι από τέσσερα εκατομμύρια [55]

Ωστόσο, παρά τις προσπάθειες αυτές και τα αποτελέσματά τους, δεν υπήρχε απόδειξη για το τελευταίο θεώρημα του Φερμά . Οι αποδείξεις των μεμονωμένων εκθετών από τη φύση τους δεν θα μπορούσε να ισχύει γενικά ακόμα και αν όλοι οι εκθέτες είχαν ελεγχθεί μέχρι και σε ένα εξαιρετικά μεγάλο αριθμό Χ, μπορεί να υπάρχει ένας εκθέτη μεγαλύτερος του Χ που μπορεί να ο ισχυρισμός μπορεί μην ισχύει (Αυτός είναι και ο λόγος για τον οποίο κάποιες προηγούμενες εικασίες δεν είχαν γίνει αποδεκτές και συνεπώς δεν θα μπορούσε να αναιρεθεί για αυτή την εικασία)

4.2.4 Σύνδεση με ελλειπτικές καμπύλες

Η στρατηγική που τελικά οδήγησε σε μια επιτυχή απόδειξη του Τελευταίου Θεωρήματος του Φερμά προέκυψε από την "εκπληκτική" [56] : 211 εικασία των Τανιγιάμα-Σιμούρα-Γουέιλ, που προτάθηκε περίπου το 1955, και πολλοί μαθηματικοί πίστευαν ότι ήταν σχεδόν αδύνατο να αποδειχθεί,[56] : 223 και η οποία συνδέθηκε στη δεκαετία του 1980 από τον Ζέραρντ Φρέι και τον Κεν Ρίμπετ με την εξίσωση του Φερμά. Με την μερική εκπλήρωση απόδειξη αυτής της εικασίας το 1995, ο Άντριου Γουάιλς τελικά κατόρθωσε να αποδείξει το Τελευταίο θεώρημα του Φερμά, ανοίγοντας το δρόμο για μια πλήρη απόδειξη από τους άλλους για αυτό που είναι σήμερα το θεώρημα των modular forms.

Η εικασία Τανιγιάμα-Σιμούρα-Βέιλ

Περίπου το 1955, οι Ιάπωνες μαθηματικοί Γκόρο Σιμούρα και Γουτάκα Τανιγιάμα παρατήρησαν μια πιθανή σύνδεση μεταξύ δύο φαινομενικά εντελώς ξεχωριστών, υποκατηγοριών των μαθηματικών, της ελλειπτικής καμπύλης και της μιγαδικής μορφής . Το αποτέλεσμα ήταν η δημιουργία του θεωρήματος modular forms (παλαιότερα ήταν γνωστό ως η εικασία Τανιγιάμα-Σιμούρα) το θεώρημα αυτό διατυπώνει ότι κάθε ελλειπτική καμπύλη σχετίζεται με τα modular forms, που σημαίνει ότι μπορεί να συνδέεται με μια μοναδική μιγαδική μορφή . Αρχικά είχε απορριφθεί ως απίθανο ή πολύ υποθετικό, και είχε επανεξεταστεί όταν ο μαθηματικός André Weil βρήκε αποδεικτικά στοιχεία που το υποστηρίζουν, αλλά όχι την απόδειξη, με αποτέλεσμα η "εκπληκτική" [56] : 211 εικασία έγινε κυρίως γνωστή ως η εικασία Τανιγιάμα-Σιμούρα-Βέιλ. Και έγινε ένα μέρος του προγράμματος Λάνγκλαντ,το οποίο είναι μια λίστα με σημαντικές εικασίες που χρειάζονται απόδειξη ή διάψευση [56] : 211-215.

Ακόμα και μετά την απόκτηση σοβαρή προσοχή, η εικασία θεωρήθηκε από τους σύγχρονους μαθηματικούς ως εξαιρετικά δύσκολο ή ίσως αδύνατο να αποδειχτεί.[56]:203-205, 223, 226Για παράδειγμα, Γουάιλς «ex -επόπτη Τζον Χ. Κόατσε δηλώνει ότι φαινόταν «πραγματικά αδύνατο να αποδειχθεί»,[56]:226 και ο Κεν Ρίμπετ θεωρούσε τον εαυτό του «ένα από τα άτομα της τεράστιας πλειοψηφίας των ανθρώπων που πίστευαν ότι ήταν εντελώς απρόσιτα ", προσθέτοντας ότι ο Άντριου Γουάιλς ήταν ίσως ένας από τους λίγους ανθρώπους στη γη που είχαν το θράσος να ονειρεύονται ότι μπορεί πραγματικά να αποδειχθεί." [56]:223

Η εξίσωση του Φρέι/Θεώρημα Ρίμπετ

Το 1984, ο ΓκέρχαρντΦρέι σημείωσε μια σύνδεση μεταξύ της εξίσωσης Φερμά και του θεωρήματος της κατασκευής των modular forms, που τότε ακόμα ήταν μια εικασία. Εάν η εξίσωση του Fermat είχε οποιαδήποτε λύση (a, b, c) για εκθέτης $p > 2$, τότε θα μπορούσε να αποδειχθεί ότι η θεωρία της ελλειπτικής καμπύλης (γνωστή σήμερα ως Φρέι καμπύλη). Η ελλειπτική καμπύλη προτάθηκε για πρώτη φορά στη δεκαετία του 1960 από τον Ιβ Ελεμπούαρχ, αλλά δεν τόνισε τη σημασία της μη ύπαρξης modular forms.

$$y^2 = x\,(x - a^p)(x + b^p)$$

θα έχουν τέτοιες ασυνήθιστες ιδιότητες το οποίο θα ήταν απίθανο να είναι στοιχεία των modular forms. ref>Frey G (1986). «Links between stable elliptic curves and certain diophantine equations». *Ann. Univ. Sarav. Ser. Math.* **1**: 1–40.</ref> Αυτό θα ερχόταν σε αντίθεση με το θεώρημα modular forms, η οποία υποστήριξε ότι όλες οι ελλειπτικές καμπύλες είναι modular. Ως εκ τούτου, ο Φρέι παρατήρησε ότι η απόδειξη των Τανιγιάμα-Σιμούρα-Βέιλ εικασία θα αποδειχθεί ταυτόχρονα με το τελευταίο θεώρημα του Φερμά.[57]

Ακολουθώντας αυτή τη στρατηγική, μια απόδειξη για το τελευταίο θεώρημα του Φερμά απαιτούσε δύο βήματα. Πρώτον, ήταν απαραίτητο να δείξουμε ότι η υποψία του Φρέι ήταν σωστή: ότι εάν μια ελλειπτική καμπύλη δομήθηκε με τον τρόπο αυτό, χρησιμοποιώντας ένα σύνολο αριθμών που ήταν μία λύση της εξίσωσης Φερμά, η ελλειπτική καμπύλη που προκύπτει δεν θα μπορούσε να είναι modular. Ο Φρέι δεν κατόρθωσε μια αυστηρή απόδειξη, το κομμάτι που έλειπε εντοπίσθηκε από τον Ζαν Πιέρ Σερ και να αποδειχθεί το 1986 από τον Κεν Ρίμπετ. Δεύτερον, ήταν αναγκαίο να αποδειχθεί το θεώρημα των modular forms - ή, τουλάχιστον, να apodeixue;i για την υποκατηγορία των περιπτώσεων, η οποία περιελάμβανε την εξίσωση Φρέι - πιστεύεται ευρέως ότι ήταν απρόσιτη η απόδειξη,από τους σύγχρονους μαθηματικούς.[56]:203-205, 223, 226

- Το θεώρημα του Ρίμπετ- αποδείχθηκε το 1986- έδειξε ότι αν μια λύση από την εξίσωση του Φερμά υπάρχει, θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για τη δημιουργία μιας ελλειπτικής καμπύλης που δεν ήταν modular
- Το θεώρημα των modular forms - αν αποδειχθεί για την εξίσωση του Φρέι - θα σήμαινε ότι όλες οι ελλειπτικές καμπύλες είναι αναγκαστικά modular.
- Η αντίφαση σημαίνει ότι δεν υπάρχουν λύσεις που μπορούν να υπάρξουν με την εξίσωση του Φερμά, αποδεικνύοντας έτσι Τελευταίο θεώρημα του Φερμά.

Γενική απόδειξη του Γουάιλς

Η απόδειξη του Ρίμπετ έψιλον εικασία το 1986 πραγματοποίησε το πρώτος από τους δύο στόχους που προτείνει ο Φρέι. Κατόπιν της επιτυχίας του Ρίμπε, ο Άντριου Γουάιλς, ένας Άγγλος μαθηματικός που είχε γοητευτεί από την παιδική ηλικία με το τελευταίο θεώρημα του Φερμά, και με προγενέστερη μελέτη στο χώρο των ελλειπτικών εξισώσεων, αποφάσισε να δεσμευτεί με την επίτευξη το δεύτερου στόχο : να αποδειχθεί μια ειδική περίπτωση της θεώρημα των modular forms (τότε γνωστή ως η εικασία Τανιγιάμα-Σιμούρα) για ημισταθερές ελλειπτικές καμπύλες[58]

Ο Γουάιλς εργάστηκε σε αυτό το έργο για έξι χρόνια με σχεδόν απόλυτη μυστικότητα, κάλυπτε μέχρι και τις προσπάθειές του με την εμφάνιση προηγούμενων εργασιών σε μικρά τμήματα ως ξεχωριστές εργασίες και εμπιστευτικά μόνο στη σύζυγό του[56]:229-230 Αρχική του μελέτη πρότεινε μια απόδειξη με επαγωγή,[56]:230-232, 249-252 και βασίστηκε στην αρχική εργασία του και την πρώτη σημαντική ανακάλυψη σχετικά με τη θεωρία του Γκαλουά[56]:251-253, 259 πριν από τη προσπάθεια να επεκτείνει Οριζόντια θεωρία του Ιγασάγα για την επαγωγή το 1990-1991, όταν φάνηκε ότι δεν υπήρχε επαρκής υπάρχουσα προσέγγιση στο πρόβλημα.[56]:258-259 Ωστόσο, το καλοκαίρι του 1991, η θεωρία του Ιγασάνα, επίσης, φάνηκε να μην επαρκεί για την επίλυση των κεντρικών ζητημάτων του προβλήματος.[56]:259-260[59] Κατόπιν, πλησίασε τους συναδέλφους του για να αναζητήσει τυχόν υποδείξεις από έρευνα αιχμής και τις νέες τεχνικές, και ανακάλυψε το σύστημα του Όιλερ που πρόσφατα είχε αναπτύχθηκε από τον Βίκτορ Καλιβάγκην και τον Ματίας Φλατς, η οποία φαινόταν ιδανική για το επαγωγικό μέρος της απόδειξης του .[56]:260-261 Ο Γουάιλς μελέτησε και επέκτεινε αυτή την προσέγγιση, στην οποία και εργάστηκε. Δεδομένου ότι το έργο του στηρίχθηκε στη συγκεκριμένη μεθόδους προσέγγισης σε μεγάλο βαθμό, αλλά οι προσεγγίσεις ήταν καινούργιες για τον Γουάιλς ο ίδιος , τον Ιανουάριο του 1993 ζήτησε από συνάδελφό του στο Πρίνστον, Νικ Κατζ, να ελέγξει τον συλλογισμό του για λάθη. Το συμπέρασμά τους την εποχή εκείνη ήταν ότι οι τεχνικές που χρησιμοποιούνται από Γουάιλς φάνηκε να λειτουργεί σωστά.[56]:261-265[60]

Μέχρι τα μέσα του Μάη του 1993 ο Γουάιλς αισθάνθηκε έτοιμος να πει στη γυναίκα του ότι νόμιζε πως είχε την απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Φερμά,[56]:265 και τον Ιούνιο ένιωθε αρκετά σίγουρος για να παρουσιάσει τα αποτελέσματα του σε τρεις διαλέξεις που πραγματοποιήθηκαν στις 21 - 23 Ιουν. 1993 στο Ινστιτούτο Μαθηματικών Επιστημών Ισαάκ Νεύτων.[61] Συγκεκριμένα, ο Γουάιλς παρουσίασε την απόδειξη της εικασίας Τανιγιάμη-Σιμούρα για ημισταθερές ελλειπτικές καμπύλες καθώς και την απόδειξη της έψιλοντικής εικασίας του Ρίμπετ, αυτό συνεπαγόταν την απόδειξη του τελευταίου θεωρήματος του Φερμά. Ωστόσο, κατέστη σαφές κατά τη διάρκεια της αξιολόγησης ότι ένα κρίσιμο σημείο στην απόδειξη ήταν εσφαλμένη. Περιείχε ένα λάθος σε ένα όριο της τάξης του συγκεκριμένου. Το σφάλμα απασχόλησε πολλούς μαθηματικούς και τη διαιτησία των χειρόγραφων ανέλαβε μια ομάδα μαθηματικών, συμπεριλαμβανομένου του Κατζ (στο ρόλο του ως κριτής),[62] ο οποίος ειδοποίησε τον Γουάιλς στις 23 Αυγούστου 1993.[63]

4.2.5 Μεταγενέστερες εξελίξεις

Η πλήρης Τανιγιάμα-Σιμούρα-Βέιλ εικασία τελικά αποδεικνύεται από τους Ντάιαμοντ (1996), Κόνραντ & Ντάιαμοντ & Τέιλορ (1999), και Μπρουέλ & Κονραντ & Ντάιμοντ & Τέιλορ (2001), οι οποίοι με βάση τις εργασίες του Γουάιλς, διαχώρισαν σταδιακά και επεκτάθηκαν στις υπόλοιπες περιπτώσεις μέχρι να αποδειχθεί πλήρως. Η πλήρως αποδεδειγμένη εικασία έγινε γνωστή ως θεώρημα των *modular forms*. Πολλά άλλα θεωρήματα στη θεωρία αριθμών, που είναι παρόμοια με το Τελευταίο θεώρημα του Φερμά, προκύπτουν επίσης με την ίδια λογική, χρησιμοποιώντας το θεώρημα των *modular forms*. Για παράδειγμα, κανένας κύβος δεν μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δύο διαφορετικών n-οστών δυνάμεων, όπου $n \geq 3$. (Η περίπτωση $n = 3$ ήταν ήδη γνωστή από τον Όιλερ)

4.3 Εκθέτες εκτός θετικών ακεραίων

4.3.1 Ρητοί εκθέτες

Όλες οι λύσεις της Διοφαντικής εξίσωσης $a^{n/m} + b^{n/m} = c^{n/m}$ με n=1 πο υπολογίστηκαν από τον Λένστρα το 1992.[64] Στην περίπτωση κατά την οποία το m^{th} οι ρίζες πρέπει να είναι πραγματικές και θετικές και όλες δίνονται από [65]

$a = rs^m$

$b = rt^m$

$c = r(s+t)^m$

για θετικούς ακέραιους *r, s, t* με *s* και *t* πρώτους μεταξύ τους.

Το 2004 για *n*>2, οι Μπένετ, Γλάς Σζεκέλυ απέδειξαν ότι αν ο ΜΚΔ(*n*,*m*)=1 τότε υπάρχουν ακέραιες λύσεις αν και μόνο αν το 6 διαιρεί *m*, και $a^{1/m}$, $b^{1/m}$, και $c^{1/m}$ είναι διαφορετικής 6ης πολυπλοκότητας ρίζες για τον ίδιο πραγματικό αριθμό.[66]

4.3.2 Αρνητικοί εκθέτες

n = –1

Όλοι οι συντελεστές τις εξίσωσης $a^{-1} + b^{-1} = c^{-1}$ μπορούν να δοθούν με τις μορφές[67] :

$a = mn + m^2,$

$b = mn + n^2,$

$c = mn$

για θετικούς, πρώτους μεταξύ τους, ακεραίους m, n.

n = –2

Στην περίπτωση *n* = –2 αντιστοιχεί σε μια απειρία λύσεων, και αυτή έχει μια γεωμετρική ερμηνεία όσον αφορά το ορθογώνιο τρίγωνο με ακέραιες πλευρές και ακέραιο το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα[68][69] Το σύνολο των λύσεων μπορεί να δοθεί από τις εξισώσεις

$a = (v^2 - u^2)(v^2 + u^2),$

$b = 2uv(v^2 + u^2),$

$d = 2uv(v^2 - u^2),$

για ξένους ακέραιους *u*, *v* με *v* > *u*. Η γεωμετρική ερμηνεία είναι ότι οι *a* και *b* είναι οι ακέραιες κάθετες πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και *d* είναι το ύψος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Με τα δεδομένα αυτά η υποτείνουσα είναι ο ακέραιος

$c = (v^2 + u^2)^2,$

και η (a,b,c) είναι μία Πυθαγόρεια τριάδα.

Ακέραιος *n* < –2

Δεν υπάρχουν ακέραιες λύσεις για την εξίσωση $a^n + b^n = c^n$ για ακέραιους *n* < –2. Αν υπήρχαν, τότε η εξίσωση θα μπορούσε να πολλαπλασιαστεί με τους $a^{|n|}b^{|n|}c^{|n|}$ και τροποποιείται σε $(bc)^{|n|} + (ac)^{|n|} = (ab)^{|n|}$, το οποίο είναι αδύνατο σύμφωνα με το τελευταίο θεώρημα του Φερμά.

4.4 Μήπως ο Φερμά είχε μια γενική απόδειξη;

Οι μαθηματικές τεχνικές που χρησιμοποιούσε ο Φερμά για τη "θαυμάσια" απόδειξη είναι άγνωστες. Μόνο μία λεπτομερή απόδειξη Fermat έχει διασωθεί, από την παράπανω απόδειξη ότι δεν υπάρχουν τρεις πρώτοι μεταξύ τους ακέραιοι (x, y, z) που να ικανοποιούν την εξίσωση $x^4 - y^4 = z^2$.

Η απόδειξη Τέιλορ και Γουάιλς στηρίζεται σε μαθηματικές τεχνικές που αναπτύχθηκαν τον 20ο αιώνα, που θα ήταν άγνωστες για τους μαθηματικούς που είχαν εργαστεί στο το τελευταίο θεώρημα του Φερμά, ακόμη και έναν αιώνα νωρίτερα. Η υποτιθέμενη «θαυμάσια απόδειξη του "Φερμά", θα έπρεπε να είναι στοιχειώδης, λόγω της μαθηματικής γνώσης του χρόνου, και έτσι δεν θα μπορούσε να ήταν το ίδιο με την απόδειξη του Γουάιλς. Οι περισσότεροι μαθηματικοί και ιστορικοί αμφιβάλλουν ότι Fermat είχε μια έγκυρη απόδειξη του θεωρήματος του για όλους τους εκθέτες n.

4.5 Χρηματικά βραβεία

Το 1816 και ξανά το 1850, η Γαλλική Ακαδημία των Επιστημών αθλοθέτησε ένα βραβείο για μια γενική απόδειξη του Τελευταίου θεωρήματος του Φερμά.[70] Το 1857, η Ακαδημία έδωσε 3000 φράγκα και ένα χρυσό μετάλλιο στον Κούμμερ για την έρευνά του σχετικά με τους ιδανικούς αριθμούς, παρόλο που ο ίδιος δεν είχε υποβάλει δήλωση για το βραβείο.[71] Άλλο βραβείο αθλοθετήθηκε από την Ακαδημία των Βρυξελλών το 1883..[72]

Το 1908, ο Γερμανός βιομήχανος και της ερασιτέχνης μαθηματικός Paul Wolfskehl κληροδότησε 100.000 μάρκα στην Ακαδημία Επιστημών της Γκότιγκεν για να αθλοθετηθεί βραβείο για μια πλήρη απόδειξη του Τελευταίου θεωρήματος του Φερμά.[73] Στις 27 Ιουνίου 1908 η Ακαδημία δημοσίευσε εννέα κανόνες για την απονομή του βραβείου. Μεταξύ άλλων, οι κανόνες αυτοί απαιτούσαν η απόδειξη να δημοσιευθεί σε επιστημονικό περιοδικό, το βραβείο να μη χορηγηθεί πριν περάσουν δύο έτη από τη δημοσίευση, και να μη δοθεί μετά την 13 Σεπτεμβρίου 2007, περίπου έναν αιώνα μετά ο αγώνας ξεκίνησε.[74] O Wiles εισέπραξε τα χρήματα του βραβείου, που ανέρχονταν τότε σε 50.000 δολάρια περίπου, στις 27 Ιουνίου 1997.[75]

Πριν από την απόδειξη του Γουάιλς, χιλιάδες λανθασμένες αποδείξεις υποβλήθηκαν στην επιτροπή Wolfskehl, που γεμίζουν κάπου 3 μέτρα χαρτί αλληλογραφίας.[76] Κατά το πρώτο έτος (1907-1908) υποβλήθηκαν 621 απόπειρες απόδειξης , αν και από τη δεκαετία του 1970, ο ρυθμός υποβολής είχε μειωθεί σε περίπου 3-4 προσπάθειες απόδειξης ανά μήνα. Σύμφωνα με τον F. Schlichting, μέλος της κριτικής επιτροπής του βραβείου Βόλφσκελ, οι περισσότερες από τις αποδείξεις βασίζονταν σε στοιχειώδεις μεθόδους που διδάσκονται στα σχολεία, και συχνά υποβάλλονταν από "ανθρώπους με τεχνική εκπαίδευση, αλλά αποτυχημένη καριέρα".[77]

4.6 Στο δημοφιλή πολιτισμό

- Ένα επεισόδιο της τηλεοπτικής σειράς *Star Trek: The Next Generation*, με τον τίτλο "Το βασιλικό", αναφέρεται στο θεώρημα στην πρώτη σκηνή.[78]

- "Η απόδειξη" -*Nova* (PBS) ντοκιμαντέρ σχετικά με την απόδειξη του Άντριου Γουάιλς για το Τελευταίο Θεώρημα του Φερμά.

- Στις 17 Αυγ 2011, ένα Google doodle είχε εμφανιστεί στην αρχική σελίδα του Google, που δείχνει ένα πίνακα με το θεώρημα αυτό. Όταν αιωρούνταν πάνω, εμφανίζει το κείμενο "Έχω ανακαλύψει μια πραγματικά θαυμάσια απόδειξη αυτού του θεωρήματος, την οποία αυτό το doodle είναι πολύ μικρό για να περιέχει". Αυτό είναι μια αναφορά στο σημείωμα του Φερμά στο περιθώριο της *Αριθμητικής*. Έτσι εορτάστηκε η 410η επέτειος γέννησης του Φερμά, διαδικτυακά.[79]

- Στο βιβλίο Το κορίτσι που έπαιζε με τη φωτιά, ο κύριος χαρακτήρας η Λίσμπεθ Σάλαντερ παθαίνει εμμονή με το θεώρημα στα αρχικά κεφάλαια του βιβλίου. Συνεχίζοντας την προσπάθειά της να καταλήξει σε μια απόδειξη λειτουργεί ως υποπλοκή σε όλη την ιστορία, και χρησιμοποιείται ως ένας τρόπος για να αποδείξει την εξαιρετική ευφυΐα της. Στο τέλος εμφανίζεται με μια απόδειξη (η πραγματική απόδειξη δεν εμφανίζεται στο βιβλίο). Ωστόσο πυροβολείται στο κεφάλι. και η απόδειξη χάνεται.

4.7 Δείτε επίσης

- Εικασία του Γκόλντμπαχ

4.8 Σημειώσεις

[1] Για παράδειγμα $((j^r+1)^s)^r + (j(j^r+1)^s))^r = (j^r+1)^{rs+1}$.

4.9 Παραπομπές

[1] Stark, pp. 151–155.

[2] Stillwell, John (2003). *Elements of Number Theory*. New York: Springer-Verlag, σελ. 110–112. ISBN 0-387-95587-9. http://books.google.com/books?id=LiAlZO2ntKAC&pg=PA110.

[3] Aczel, pp. 13–15

[4] Singh, pp. 18–20.

[5] Singh, p. 6.

[6] Stark, pp. 145–146.

[7] Singh, pp. 50–51.

[8] Stark, p. 145.

[9] Aczel, pp. 44–45; Singh, pp. 56–58.

[10] Aczel, pp. 14–15.

[11] Stark, pp. 44–47.

[12] Friberg, pp. 333– 334.

[13] p. 731; Singh, pp. 60–62; Aczel, p. 9.

[14] Dickson, pp. 615–616; Aczel, p. 44.

[15] Ribenboim, pp. 13, 24.

[16] Singh, pp. 62–66.

[17] Dickson, p. 731.

[18] Singh, p. 67; Aczel, p. 10.

[19] Freeman, L. (2005). «Fermat's One Proof». http://fermatslasttheorem.blogspot.com/2005/05/fermats-one-proof.html. Ανακτήθηκε στις 2009-05-23.

[20] Ριμπενμπόιμ, pp. 15–24.

[21] Frénicle de Bessy, *Traité des Triangles Rectangles en Nombres*, vol. I, 1676, Paris. Reprinted in *Mém. Acad. Roy. Sci.*, **5**, 1666–1699 (1729).

[22] Euler, Leonhard (1738). «Theorematum quorundam arithmeticorum demonstrationes». *Comm. Acad. Sci. Petrop.* **10**: 125–146.. Reprinted *Opera omnia*, ser. I, "Commentationes Arithmeticae", vol. I, pp. 38–58, Leipzig:Teubner (1915).

[23] Kausler, C. F. (1802). «Nova demonstratio theorematis nec summam, nec differentiam duorum cuborum cubum esse posse». *Novi Acta Acad. Petrop.* **13**: 245–253.

[24] Barlow, Peter (1811). *An Elementary Investigation of Theory of Numbers*. St. Paul's Church-Yard, London: J. Johnson, σελ. 144–145.

[25] Legendre, Adrien-Marie (1830). *Théorie des Nombres (Volume II)* (3η έκδοση). Paris: Firmin Didot Frères. Reprinted in 1955 by A. Blanchard (Paris).

[26] Schopis (1825). *Einige Sätze aus der unbestimmten Analytik*. Gummbinnen: Programm.

[27] Terquem, O. (1846). «Théorèmes sur les puissances des nombres». *Nouv. Ann. Math.* **5**: 70–87.

[28] Bertrand, Joseph Louis François (1851). *Traité Élémentaire d'Algèbre*. Paris: Hachette, σελ. 217–230, 395.

[29] Lebesgue, V.A. (1853). «Résolution des équations biquadratiques $z^2 = x^4 \pm 2^m y^4$, $z^2 = 2^m x^4 - y^4$, $2^m z^2 = x^4 \pm y^4$». *J. Math. Pures Appl.* **18**: 73–86.

[30] Lebesgue, V.A. (1859). *Exercices d'Analyse Numérique*. Paris: Leiber et Faraguet, σελ. 83–84, 89.

[31] Lebesgue, V.A. (1862). *Introduction à la Théorie des Nombres*. Paris: Mallet-Bachelier, σελ. 71–73.

[32] Pepin, T. (1883). «Étude sur l'équation indéterminée $ax^4 + by^4 = cz^2$». *Atti Accad. Naz. Lincei* **36**: 34–70.

[33] Tafelmacher, W. L. A. (1893). «Sobre la ecuación $x^4 + y^4 = z^4$». *Ann. Univ. Chile* **84**: 307–320.

[34] Hilbert, David (1897). «Die Theorie der algebraischen Zahlkörper». *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **4**: 175–546. Reprinted in 1965 in *Gesammelte Abhandlungen, vol. I* by New York:Chelsea.

[35] Bendz, T. R. (1901). *Öfver diophantiska ekvationen* xn + yn = zn. Uppsala: Almqvist & Wiksells Boktrycken.

[36] Gambioli, D. (1901). «Memoria bibliographica sull'ultimo teorema di Fermat». *Period. Mat.* **16**: 145–192.

[37] Kronecker, Leopold (1901). *Vorlesungen über Zahlentheorie, vol. I*. Leipzig: Teubner, σελ. 35–38. Reprinted by New York: Springer-Verlag in 1978.

[38] Bang, A. (1905). «Nyt Bevis for at Ligningen $x^4 - y^4 = z^4$, ikke kan have rationale Løsinger». *Nyt Tidsskrift Mat.* **16B**: 35–36.

[39] Sommer, J. (1907). *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Leipzig: Teubner.

[40] Bottari, A. (1908). «Soluzione intere dell'equazione pitagorica e applicazione alla dimostrazione di alcune teoremi dellla teoria dei numeri». *Period. Mat.* **23**: 104–110.

[41] Rychlik, K. (1910). «On Fermat's last theorem for $n = 4$ and $n = 3$ (in Bohemian)». *Časopis Pěst. Mat.* **39**: 65–86.

[42] Nutzhorn, F. (1912). «Den ubestemte Ligning $x^4 + y^4 = z^4$». *Nyt Tidsskrift Mat.* **23B**: 33–38.

[43] Carmichael, Robert Daniel (1913). «On the impossibility of certain Diophantine equations and systems of equations». *Amer. Math. Monthly* (Mathematical Association of America) **20** (7): 213–221. doi:10.2307/2974106.

[44] Hancock, H. (1931). *Foundations of the Theory of Algebraic Numbers, vol. I*. New York: Macmillan.

[45] Vrănceanu, G. (1966). «Asupra teorema lui Fermat pentru n=4». *Gaz. Mat. Ser. A* **71**: 334–335. Reprinted in 1977 in *Opera matematica*, vol. 4, pp. 202–205, Bucureşti: Edit. Acad. Rep. Soc. Romana.

[46] Ribenboim, pp. 1–2.

[47] Laubenbacher, R.; Pengelley, D. (2007). «Voici ce que j'ai trouvé: Sophie Germain's grand plan to prove Fermat's Last Theorem». http://www.math.nmsu.edu/%7Edavidp/germain.pdf. Ανακτήθηκε στις 2009-05-19.

[48] Aczel, p. 57.

[49] Terjanian, G. (1977). «Sur l'équation $x^{2p} + y^{2p} = z^{2p}$». *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Série a et B* **285**: 973–975.

[50] Adleman, L. M.; Heath-Brown (June 1985). «The first case of Fermat's last theorem». *Inventiones Mathematicae* (Berlin: Springer) **79** (2): 409–416. doi:10.1007/BF01388981.

[51] Aczel, pp. 84–88; Singh, pp. 232–234.

[52] Faltings, Gerd (1983). «Endlichkeitssätze für abelsche Varietäten über Zahlkörpern». *Inventiones Mathematicae* **73** (3): 349–366. doi:10.1007/BF01388432.

[53] Ribenboim P (1979). *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*. New York: Springer Verlag, σελ. 202. ISBN 978-0-387-90432-0.

[54] Wagstaff SS, Jr. (1978). «The irregular primes to 125000». *Math. Comp.* (American Mathematical Society) **32** (142): 583–591. doi:10.2307/2006167. (PDF)

[55] Buhler J, Crandell R, Ernvall R, Metsänkylä T (1993). «Irregular primes and cyclotomic invariants to four million». *Math. Comp.* (American Mathematical Society) **61** (203): 151–153. doi:10.2307/2152942.

[56] [Fermat's Last Theorem, Simon Singh, 1997, ISBN 1-85702-521-0

[57] Singh, pp. 194–198; Aczel, pp. 109–114.

[58] Singh, p. 205; Aczel, pp. 117–118.

[59] Singh, pp. 237–238; Aczel, pp. 121–122.

[60] Singh, pp. 239–243; Aczel, pp. 122–125.

[61] Singh, pp. 244–253; Aczel, pp. 1–4, 126–128.

[62] Aczel, pp. 128–130.

[63] Singh, p. 257.

[64] Lenstra, Jr. H.W. (1992). *On the inverse Fermat equation.* Discrete Mathematics, **106-107**, pp. 329-331.

[65] Newton, M., "A radical diophantine equation", *Journal of Number Theory* 13 (1981), 495-498.

[66] Bennett, Curt D., Glass, Andrew M.W., and Székely, Gábor J. (2004). *Fermat's last theorem for rational exponents.* The American Mathematical Monthly, **111**, no. 4, pp. 322-329.

[67] Dickson, pp. 688-691

[68] Voles, Roger, "Integer solutions of $a^{-2} + b^{-2} = d^{-2}$," *Mathematical Gazette* 83, July 1999, 269–271.

[69] Richinick, Jennifer, "The upside-down Pythagorean Theorem," *Mathematical Gazette* 92, July 2008, 313–317.

[70] Aczel, p. 69; Singh, p. 105.

[71] Aczel, p. 69.

[72] Koshy T (2001). *Elementary number theory with applications*. New York: Academic Press, σελ. 544. ISBN 978-0-12-421171-1.

[73] Singh, pp. 120–125, 131–133, 295–296; Aczel, p. 70.

[74] Singh, pp. 120–125.

[75] Singh, p. 284

[76] Singh, p. 295.

[77] Singh, pp. 295–296.

[78] «Facets (episode) - Memory Alpha, the Star Trek Wiki». Memory-alpha.org. http://memory-alpha.org/wiki/Facets_(episode). Ανακτήθηκε στις 2012-08-15.

[79] "Pierre de Fermat's birthday celebrated in Google Doodle", The Telegraph, 17 August 2011

4.10 Εξωτερικοί σύνδεσμοι

- Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά στο Wolfram Mathworld
- Christopher , David A. (2011). «On the equation $x^n + y^n = z^n$». http://depmath.ulbsibiu.ro/genmath/gm/vol19nr3/07_Christopher/07_Christopher.pdf.
- Wiles (1995). «Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem». http://www.cs.berkeley.edu/~{ }anindya/fermat.pdf. Ανακτήθηκε στις February 9, 2013. Scientific article by Andrew Wiles
- Daney, Charles (2003). «The Mathematics of Fermat's Last Theorem». http://cgd.best.vwh.net/home/flt/flt01.htm. Ανακτήθηκε στις 5 August 2004.
- The bluffer's guide to Fermat's Last Theorem

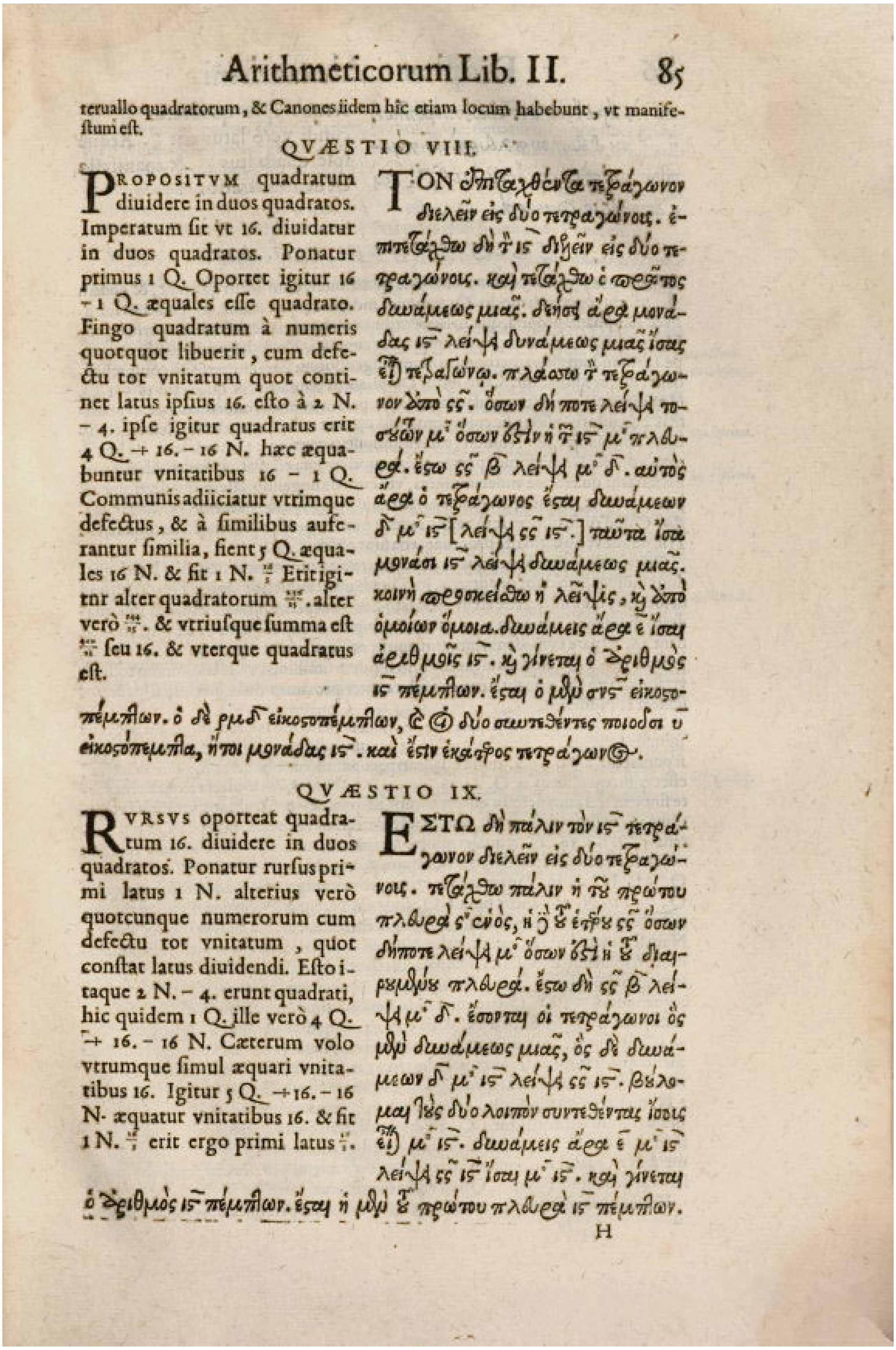
- Elkies, Noam D.. «Tables of Fermat “near-misses” — approximate solutions of $x^n + y^n = z^n$». http://www.math.harvard.edu/~{ }elkies/ferm.html.
- Freeman, Larry (2005). «Fermat’s Last Theorem Blog». http://www.fermatslasttheorem.blogspot.com. Blog that covers the history of Fermat’s Last Theorem from Fermat to Wiles.
- Hazewinkel, Michiel, επιμ.. (2001), «Fermat’s last theorem», *Encyclopedia of Mathematics*, Springer, ISBN 978-1-55608-010-4, http://www.encyclopediaofmath.org/index.php?title=p/f110070
- Ribet, Ken (1995). «Galois representations and modular forms» (PDF). http://math.stanford.edu/~{ }lekheng/flt/ribet.pdf. Discusses various material which is related to the proof of Fermat’s Last Theorem: elliptic curves, modular forms, Galois representations and their deformations, Frey’s construction, and the conjectures of Serre and of Taniyama–Shimura.
- Shay, David (2003). «Fermat’s Last Theorem». http://shayfam.com/David/flt/index.htm. Ανακτήθηκε στις 5 August 2004. The story, the history and the mystery.
- Weisstein, Eric W., "Fermat’s Last Theorem" από το MathWorld.
- O'Connor JJ, Robertson EF (1996). «Fermat’s last theorem». http://www-gap.dcs.st-and.ac.uk/~{ }history/HistTopics/Fermat’{ }s_last_theorem.html. Ανακτήθηκε στις 5 August 2004.
- «The Proof». http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/. The title of one edition of the PBS television series NOVA, discusses Andrew Wiles’s effort to prove Fermat’s Last Theorem.
- «Documentary Movie on Fermat’s Last Theorem (1996)». http://www.youtube.com/watch?v=7FnXgprKgSE. Simon Singh and John Lynch’s film tells the story of Andrew Wiles.
- Beal Fermat and Pythagora’s Triplets

4.11 Βιβλιογραφία

- Aczel, Amir, *Πώς ο A. Wiles έλυσε το τελευταίο θεώρημα του Φερμά*
- Singh, Simon, *Το τελευταίο θεώρημα του Φερμά*
- Aczel, Amir (30 September 1996). *Fermat’s Last Theorem: Unlocking the Secret of an Ancient Mathematical Problem*. Four Walls Eight Windows. ISBN 978-1-56858-077-7.
- Dickson LE (1919). *History of the Theory of Numbers. Volume II. Diophantine Analysis*. New York: Chelsea Publishing, σελ. 545–550, 615–621, 688–691, 731–776.
- Edwards, HM (1997). *Fermat’s Last Theorem. A Genetic Introduction to Algebraic Number Theory*. Graduate Texts in Mathematics. **50**. New York: Springer-Verlag.
- Friberg, Joran (2007). *Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics*. World Scientific Publishing Company. ISBN 978-981-270-452-8.
- Kleiner I (2000). «From Fermat to Wiles: Fermat’s Last Theorem Becomes a Theorem». *Elem. Math.* **55**: 19–37. doi:10.1007/PL00000079. http://math.stanford.edu/~{ }lekheng/flt/kleiner.pdf.
- Mordell LJ (1921). *Three Lectures on Fermat’s Last Theorem*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Panchishkin, Alekseĭ Alekseevich (2007). *Introduction to Modern Number Theory (Encyclopedia of Mathematical Sciences*. Springer Berlin Heidelberg New York. ISBN 978-3-540-20364-3.
- Ribenboim P (2000). *Fermat’s Last Theorem for Amateurs*. New York: Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-98508-4.
- Singh S (October 1998). *Fermat’s Enigma*. New York: Anchor Books. ISBN 978-0-385-49362-8.
- Stark H (1978). *An Introduction to Number Theory*. MIT Press. ISBN 0-262-69060-8.

4.12 Διαβάστε επίσης

- Bell, Eric T. (6 August 1998) [1961]. *The Last Problem*. New York: The Mathematical Association of America. ISBN 978-0-88385-451-8.
- Benson, Donald C. (5 April 2001). *The Moment of Proof: Mathematical Epiphanies*. Oxford University Press. ISBN 978-0-19-513919-8.
- Brudner, Harvey J. (1994). *Fermat and the Missing Numbers*. WLC, Inc. ISBN 978-0-9644785-0-3.
- Edwards, H. M. (March 1996) [1977]. *Fermat's Last Theorem*. New York: Springer-Verlag. ISBN 978-0-387-90230-2.
- Faltings G (July 1995). «The Proof of Fermat's Last Theorem by R. Taylor and A. Wiles» (PDF). *Notices of the AMS* **42** (7): 743–746. ISSN 0002-9920. http://www.ams.org/notices/199507/faltings.pdf.
- Mozzochi, Charles (7 December 2000). *The Fermat Diary*. American Mathematical Society. ISBN 978-0-8218-2670-6.
- Ribenboim P (1979). *13 Lectures on Fermat's Last Theorem*. New York: Springer Verlag. ISBN 978-0-387-90432-0.
- van der Poorten, Alf (6 March 1996). *Notes on Fermat's Last Theorem*. WileyBlackwell. ISBN 978-0-471-06261-5.
- Saikia, Manjil P (July 2011). «A Study of Kummer's Proof of Fermat's Last Theorem for Regular Primes» (PDF). *IISER Mohali Report*. http://www.thequantizedquark.com/papers/kummerFLT.pdf.



Arithmeticorum Lib. II. 85

teruallo quadratorum, & Canones iidem hîc etiam locum habebunt, vt manifestum est.

QVÆSTIO VIII.

PROPOSITVM quadratum diuidere in duos quadratos. Imperatum sit vt 16. diuidatur in duos quadratos. Ponatur primus 1 Q. Oportet igitur 16 − 1 Q. æquales esse quadrato. Fingo quadratum à numeris quotquot libuerit, cum defectu tot vnitatum quot continet latus ipsius 16. esto à 2 N. − 4. ipse igitur quadratus erit 4 Q. + 16. − 16 N. hæc æquabuntur vnitatibus 16 − 1 Q. Communis adiiciatur vtrimque defectus, & à similibus auferantur similia, fient 5 Q. æquales 16 N. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$. Erit igitur alter quadratorum $\frac{256}{25}$. alter verò $\frac{144}{25}$. & vtriusque summa est $\frac{400}{25}$ seu 16. & vterque quadratus est.

ΤΟΝ ἐπιταχθέντα τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. ἐπιτετάχθω δὴ τὸν ις̄ διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. καὶ τετάχθω ὁ πρῶτος δυνάμεως μιᾶς. δεήσει ἄρα μονάδας ις̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς ἴσας εἶναι τετραγώνῳ. πλάσσω τὸν τετράγωνον ἀπὸ ςς̄. ὅσων δήποτε λείψει τοσούτων μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ ις̄ μ° πλευρά. ἔστω ςς̄ β̄ λείψει μ° δ̄. αὐτὸς ἄρα ὁ τετράγωνος ἔσται δυνάμεων δ̄ μ° ις̄ [λείψει ςς̄ ις̄.] ταῦτα ἴσα μονάσι ις̄ λείψει δυνάμεως μιᾶς. κοινὴ προσκείσθω ἡ λεῖψις, καὶ ἀπὸ ὁμοίων ὅμοια. δυνάμεις ἄρα ε̄ ἴσαι ἀριθμοῖς ις̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄ πέμπτων. ἔσται ὁ μὲν σνς̄ εἰκοστοπέμπτων. ὁ δὲ ρμδ̄ εἰκοστοπέμπτων, καὶ οἱ δύο συντεθέντες ποιοῦσι ῡ εἰκοστόπεμπτα, ἤτοι μονάδας ις̄. καὶ ἔστιν ἑκάτερος τετράγωνος.

QVÆSTIO IX.

RVRSVS oporteat quadratum 16. diuidere in duos quadratos. Ponatur rursus primi latus 1 N. alterius verò quotcunque numerorum cum defectu tot vnitatum, quot constat latus diuidendi. Esto itaque 2 N. − 4. erunt quadrati, hic quidem 1 Q. ille verò 4 Q. + 16. − 16 N. Cæterum volo vtrumque simul æquari vnitatibus 16. Igitur 5 Q. + 16. − 16 N. æquatur vnitatibus 16. & fit 1 N. $\frac{16}{5}$ erit ergo primi latus $\frac{16}{5}$.

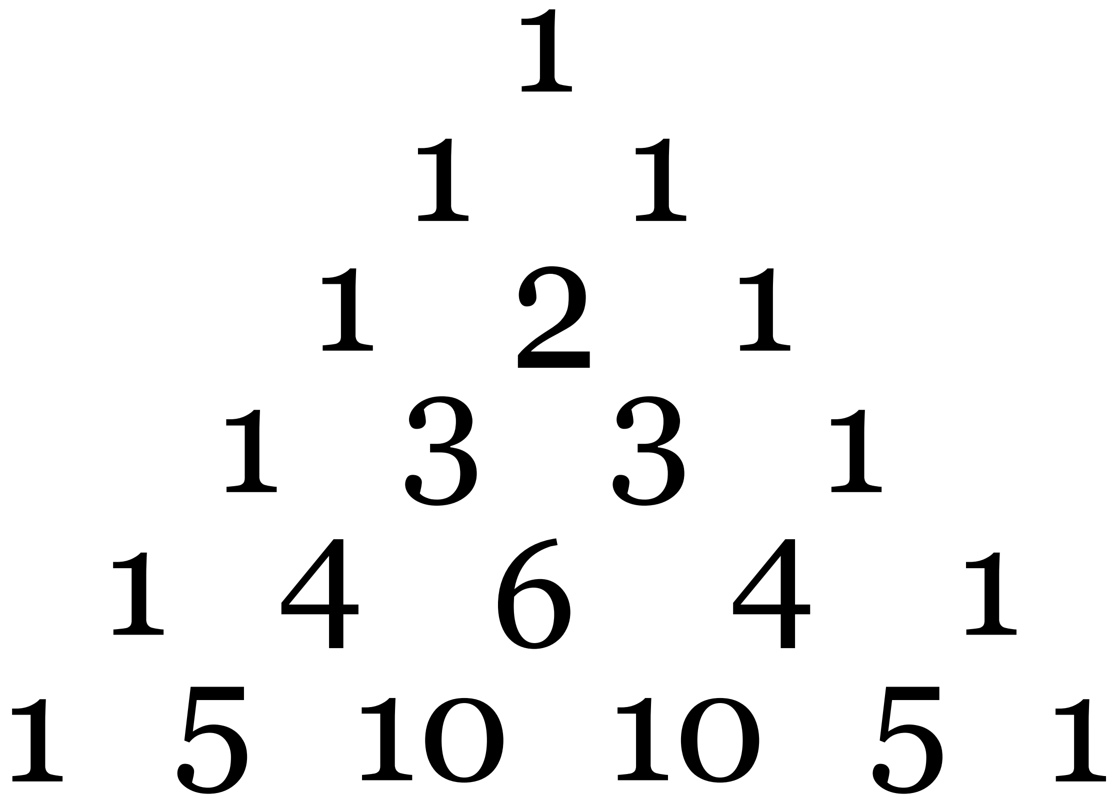
ΕΣΤΩ δὴ πάλιν τὸν ις̄ τετράγωνον διελεῖν εἰς δύο τετραγώνους. τετάχθω πάλιν ἡ τοῦ πρώτου πλευρὰ ς ἑνός, ἡ δὲ τοῦ ἑτέρου ςς̄ ὅσων δήποτε λείψει μ° ὅσων ἐστὶν ἡ τοῦ διαιρουμένου πλευρά. ἔστω δὴ ςς̄ β̄ λείψει μ° δ̄. ἔσονται οἱ τετράγωνοι ὃς μὲν δυνάμεως μιᾶς, ὃς δὲ δυνάμεων δ̄ μ° ις̄ λείψει ςς̄ ις̄. βούλομαι τοὺς δύο λοιπὸν συντεθέντας ἴσους εἶναι μ° ις̄. δυνάμεις ἄρα ε̄ μ° ις̄ λείψει ςς̄ ις̄ ἴσαι μ° ις̄. καὶ γίνεται ὁ ἀριθμὸς ις̄ πέμπτων. ἔσται ἡ μὲν τοῦ πρώτου πλευρὰ ις̄ πέμπτων.

H

Πρόβλημα II.8 στην έκδοση του 1621 του "Αριθμητικά" του Διόφαντου. Στα δεξιά βρίσκεται η περίφημη σημείωση η οποία είναι πολύ μικρή για να περιέχει την υποτιθέμενη απόδειξη του Φερμά για το "τελευταίο του θεώρημα".

Κεφάλαιο 5

Τρίγωνο του Πασκάλ



Οι πρώτες έξι σειρές του τριγώνου του Πασκάλ

Στα μαθηματικά, το **τρίγωνο του Πασκάλ** είναι μία τριγωνική γεωμετρική διάταξη των δυωνυμικών συντελεστών. Ονομάστηκε έτσι προς τιμήν του μαθηματικού Μπλεζ Πασκάλ στο μεγαλύτερο μέρος του δυτικού κόσμου, παρόλο που άλλοι μαθηματικοί το είχαν μελετήσει αιώνες πριν στην Ινδία, την Περσία, την Κίνα και την Ιταλία.

Οι σειρές στο τρίγωνο του Πασκάλ αριθμούνται ξεκινώντας από την γραμμή 0, και οι αριθμοί κάθε σειράς είναι συνήθως σχετικοί με τις διπλανές τους. Μια απλή κατασκευή του τριγώνου γίνεται με τον ακόλουθο τρόπο. Στην σειρά 0 γράφεται μόνο ο αριθμός 1. Μετά, για την κατασκευή των στοιχείων των ακόλουθων σειρών προστίθεται ο αριθμός που βρίσκεται αμέσως από πάνω και αριστερά με τον αριθμό αμέσως από πάνω και δεξιά. Αν οποιοσδήποτε από τους αριθμούς δεξιά ή αριστερά δεν υπάρχει, υποκαθίσταται με μηδέν. Για παράδειγμα, ο πρώτος αριθμός της πρώτης γραμμής είναι 0 + 1 = 1, ενώ οι αριθμοί 1 και 3 της τρίτης σειρά προτίθενται ώστε να δώσουν τον αριθμό 4 της τέταρτης σειράς.

Αυτή η κατασκευή είναι συγγενική με του δυωνυμικούς συντελεστές μέσω του κανόνα του Πασκάλ, σύμφωνα με τον οποίο αν:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

τότε

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

για οποιοδήποτε μη αρνητικό ακέραιο n και οποιονδήποτε ακέραιο k μεταξύ 0 και n.[1]

Το τρίγωνο του Πασκάλ γενικεύεται και σε περισσότερες διαστάσεις. Η τρισδιάστατη εκδοχή αποκαλείται *Πυραμίδα του Πασκάλ* ή *Τετράεδρο του Πασκάλ*, ενώ η γενική εκδοχή αποκαλείται *Simplex του Πασκάλ*

5.1 Παραπομπές

[1] Ο δυωνυμικός συντελεστής $\binom{n}{k}$ είναι συμβατικά 0 αν το k είναι είτε μικρότερο του μηδενός είτε μεγαλύτερο του n.

5.2 Text and image sources, contributors, and licenses

5.2.1 Text

- **Ars Conjectandi** *Πηγή:* https://el.wikipedia.org/wiki/Ars_Conjectandi?oldid=5003914 *Συνεισφέροντες:* Egmontaz, Λυδία, MystBot, EmausBot, ManosHacker, Vagobot, Dexbot και SamoaBot
- **Μπλεζ Πασκάλ** *Πηγή:* https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%9C%CF%80%CE%BB%CE%B5%CE%B6_%CE%A0%CE%B1%CF%83%CE%BA%CE%AC%CE%BB?oldid=5373156 *Συνεισφέροντες:* Lemur12, Badseed, FocalPoint, Gerakibot, JAnDbot, Magioladitis, CommonsDelinker, VolkovBot, Atlantia, Synthebot, TXiKiBoT, SieBot, Sotkil, Loveless, PixelBot, Ttzavaras, MelancholieBot, Stelios93~elwiki, Nikosguard, Luckas-bot, Ptbotgourou, LaaknorBot, Demhs, C messier, Xqbot, CHE, Politispittas, TjBot, GrouchoBot, Nataly8, EmausBot, ManosHacker, MerlIwBot, KAKTOS, Pagaeos, Spiros790, Dexbot και Ανώνυμες συνεισφορές: 10
- **Πιερ ντε Φερμά** *Πηγή:* https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A0%CE%B9%CE%B5%CF%81_%CE%BD%CF%84%CE%B5_%CE%A6%CE%B5%CF%81%CE%BC%CE%AC?oldid=4895794 *Συνεισφέροντες:* Veron, Harkoz, Magioladitis, Sotkil, Ttzavaras, Luckas-bot, Patriot8790, CHE, EmausBot, ChuispastonBot, WikitanvirBot, Schoolshop.gr, MerlIwBot, Spiros790 και SamoaBot
- **Τελευταίο θεώρημα του Φερμά** *Πηγή:* https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CE%B5%CE%BB%CE%B5%CF%85%CF%84%CE%B1%CE%AF%CE%BF_%CE%B8%CE%B5%CF%8E%CF%81%CE%B7%CE%BC%CE%B1_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%A6%CE%B5%CF%81%CE%BC%CE%AC?oldid=5413878 *Συνεισφέροντες:* Geraki, Robbot, Diderot~elwiki, Dead3y3, Harkoz, Thijs!bot, JAnDbot, Magioladitis, Kour, Λυδία, VolkovBot, TXiKiBoT, SieBot, Sotkil, Loveless, PipepBot, Ttzavaras, MelancholieBot, Darkicebot, Zorrobot, Luckas-bot, Jan Arkesteijn, Andromeas, D'ohBot, C messier, Xqbot, RedBot, TjBot, EmausBot, ZéroBot, WikitanvirBot, Schoolshop.gr, Yobot, Vagobot, Spiros P. Andriopoulos, SamoaBot, Anesiadk, MathScien, Francois-Pier, Gts-tg, Angelos940 και Ανώνυμες συνεισφορές: 10
- **Τρίγωνο του Πασκάλ** *Πηγή:* https://el.wikipedia.org/wiki/%CE%A4%CF%81%CE%AF%CE%B3%CF%89%CE%BD%CE%BF_%CF%84%CE%BF%CF%85_%CE%A0%CE%B1%CF%83%CE%BA%CE%AC%CE%BB?oldid=4426338 *Συνεισφέροντες:* Αντιγόνη, VolkovBot, Atlantia, TXiKiBoT, Luckas-bot, Xaris333, MondalorBot, Xqbot, TjBot, EmausBot, ZéroBot, MerlIwBot, Vagobot, YFdyh-bot, SamoaBot και Ανώνυμες συνεισφορές: 3

5.2.2 Images

- **Αρχείο:Abraham_de_moivre.jpg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1b/Abraham_de_moivre.jpg *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* University of York: Portraits of Statisticians *Αρχικός δημιουργός:* άγνωστος
- **Αρχείο:Andrew_wiles1-3.jpg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4c/Andrew_wiles1-3.jpg *Άδεια χρήσης:* Copyrighted free use *Συνεισφέροντες:* http://www.mozzochi.org/deligne60/Deligne1/_DSC0024.jpg *Αρχικός δημιουργός:* “copyright C. J. Mozzochi, Princeton N.J”
- **Αρχείο:Arsconj.gif** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/24/Arsconj.gif *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* http://nsm1.nsm.iup.edu/gsstoudt/history/images/arsconj.html *Αρχικός δημιουργός:* Jakob Bernoulli
- **Αρχείο:Blaise_pascal.jpg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/7/79/Blaise_pascal.jpg *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* ? *Αρχικός δημιουργός:* ?
- **Αρχείο:Cardano.jpg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/03/Cardano.jpg *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* http://de.wikipedia.org/wiki/Bild:Cardano.jpg (de:Benutzer:ChristianGruchow) *Αρχικός δημιουργός:* **Gerolamo Cardano** (1501-1576)
- **Αρχείο:Colin_maclaurin.jpg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f7/Colin_maclaurin.jpg *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* Smithsonian Institution Libraries *Αρχικός δημιουργός:* Harding, Edw. d
- **Αρχείο:Commons-logo.svg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/4/4a/Commons-logo.svg *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* This version created by Pumbaa, using a proper partial circle and SVG geometry features. (Former versions used to be slightly warped.) *Αρχικός δημιουργός:* SVG version was created by User:Grunt and cleaned up by 3247, based on the earlier PNG version, created by Reidab.
- **Αρχείο:Diophantus-II-8.jpg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/24/Diophantus-II-8.jpg *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* ? *Αρχικός δημιουργός:* ?
- **Αρχείο:Greek_wikiquote_logo.png** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/c/c4/Greek_wikiquote_logo.png *Άδεια χρήσης:* CC BY-SA 3.0 *Συνεισφέροντες:* :File:Wikiquote-logo.png *Αρχικός δημιουργός:* Eloquence, τροποποίηση:Ωριγένης
- **Αρχείο:Pascal’s_triangle_5.svg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Pascal%27s_triangle_5.svg *Άδεια χρήσης:* CC BY-SA 3.0 *Συνεισφέροντες:* Extracted from Image:PascalSimetria.svg with minor alterations *Αρχικός δημιουργός:* User:Conrad.Irwin *originally User:Drini*
- **Αρχείο:Pierre_de_Fermat.jpg** *Πηγή:* https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f3/Pierre_de_Fermat.jpg *Άδεια χρήσης:* Public domain *Συνεισφέροντες:* http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~{ }history/PictDisplay/Fermat.html *Αρχικός δημιουργός:* ?

5.2.3 Content license

-