



Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων & Φωτογραμμετρία

Φωτογραμμετρική Οπισθοτομία

Υποδειγματικά λυμένη άσκηση

Δεδομένα

Τα δεδομένα είναι οι γεωδαιτικές συντεταγμένες πέντε φωτοσταθερών (Φ_i), καθώς και οι μετρημένες (και διορθωμένες από συστηματικά σφάλματα, δηλ. συρρίκνωση, πρωτεύον σημείο και ακτινική διαστροφή) εικονοσυντεταγμένες τους. Δίνεται ακόμα η σταθερά της μηχανής $c=152.34\text{mm}$

Συντεταγμένες φωτοσταθερών (ΣΠΑ/Φ)					
α/α	$X(\text{m})$	$Y(\text{m})$	$Z(\text{m})$	$x(\text{mm})$	$v(\text{mm})$
Φ_1	6050.75	12424.50	201.70	-73.206	80.153
Φ_2	6777.80	12450.45	257.60	65.578	94.446
Φ_3	6450.20	12050.10	169.20	-2.616	10.861
Φ_4	6102.55	11407.65	181.30	-70.080	-106.349
Φ_5	6653.40	11475.80	205.80	34.277	-103.873

Επίλυση

1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα που τίθεται αφορά στον προσδιορισμό των στοιχείων του εξωτερικού προσανατολισμού ($X_0, Y_0, Z_0, \omega, \phi, \kappa$) μιας λήψης από μετρήσεις των εικονοσυντεταγμένων x_i, y_i πέντε φωτοσταθερών σημείων. Για τα σημεία αυτά θεωρούνται γνωστές οι συντεταγμένες X_i, Y_i στην προβολή Hatt καθώς και τα ορθομετρικά τους υψόμετρα Z_i (H_i).

Έτσι, επειδή τα μετρημένα στοιχεία είναι $n=10$ (δύο εικονοσυντεταγμένες για κάθε ένα από τα πέντε φωτοσταθερά), ενώ οι άγνωστες ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι είναι $m=6$ (τα στοιχεία του εξωτερικού προσανατολισμού) απαιτείται συνόρθωση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνόρθωση γίνεται με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων.

2. Συνθήκη Συγγραμμικότητας

Ως σχέσεις που συνδέουν το διάνυσμα των μετρήσεων με το διάνυσμα των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων (εξισώσεις παρατήρησης) θεωρούνται οι εξισώσεις της Συνθήκης Συγγραμμικότητας. Η συνθήκη αυτή εκφράζει με μαθηματικό τρόπο το γεγονός ότι το σημείο M στο αντικείμενο, το προβολικό κέντρο O και η εικόνα m του σημείου στη φωτογραφία βρίσκονται πάνω σε ευθεία ή, ισοδύναμα, ότι τα διανύσματα OM και $Oμ$ είναι συγγραμμικά.

Οι εξισώσεις αυτές διατυπώνονται υπό μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -c \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathcal{R}_{\omega\phi\kappa} \cdot \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}$$

Δεδομένου ότι η κλίμακα λ αφορά στο συγκεκριμένο σημείο και διαφοροποιείται από σημείο σε σημείο της λήψης, είναι επιθυμητή η εξάλειψή της. Για το λόγο αυτό με διαίρεση της πρώτης και δεύτερης με την τρίτη εξίσωση προκύπτουν οι εξισώσεις της Συνθήκης Συγγραμμικότητας:

$$\begin{aligned} x &= -c \frac{r_{11}(X - X_o) + r_{12}(Y - Y_o) + r_{13}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} = -c \frac{A_1}{\Pi} \\ y &= -c \frac{r_{21}(X - X_o) + r_{22}(Y - Y_o) + r_{23}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} = -c \frac{A_2}{\Pi} \end{aligned} \quad (1)$$

Όπου r_{ij} τα στοιχεία του πίνακα στροφής R :

$$\mathcal{R}_{\omega\phi\kappa} = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\kappa & \sin\omega \sin\phi \cos\kappa + \cos\omega \sin\kappa & -\cos\omega \sin\phi \cos\kappa + \sin\omega \sin\kappa \\ -\cos\phi \sin\kappa & -\sin\omega \sin\phi \sin\kappa + \cos\omega \cos\kappa & \cos\omega \sin\phi \sin\kappa + \sin\omega \cos\kappa \\ \sin\phi & -\sin\omega \cos\phi & \cos\omega \cos\phi \end{pmatrix}$$

3. Παραγωγή εξισώσεων της Συνθήκης Συγγραμμικότητας

Οι εξισώσεις της Συνθήκης Συγγραμμικότητας δεν είναι, προφανώς, γραμμικές ως προς τις άγνωστες παραμέτρους. Για να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων απαιτείται γραμμικοποίηση κατά Taylor των εξισώσεων αυτών. Η γραμμικοποίηση πραγματοποιείται γύρω από κάποιες προσωρινές τιμές $(X_o, Y_o, Z_o, \omega, \phi, \kappa)^{(0)}$ για τους αγνώστους.

Για τη γραμμικοποίηση θεωρούνται οι προηγούμενες εξισώσεις των εικονοσυντεταγμένων x και y ως συναρτήσεις F_x και F_y αντίστοιχα:

$$\begin{aligned} x &= -c \frac{r_{11}(X - X_o) + r_{12}(Y - Y_o) + r_{13}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} = F_x \\ y &= -c \frac{r_{21}(X - X_o) + r_{22}(Y - Y_o) + r_{23}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} = F_y \end{aligned}$$

Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων αυτών ως προς τους αγνώστους της οπισθοτομίας με ταυτόχρονη παράλειψη των διαφορικών ανώτερης τάξης δίνει:

$$x = F_x = F_x^{(0)} + \frac{\partial F_x}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial F_x}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial F_x}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial F_x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F_x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} d\kappa$$

$$y = F_y = F_y^{(0)} + \frac{\partial F_y}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial F_y}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial F_y}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial F_y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F_y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} d\kappa$$

Όπου:

- ✓ $F_x^{(0)}$ και $F_y^{(0)}$ είναι οι τιμές των παρατηρήσεων x και y υπολογισμένες από τις προσωρινές τιμές των αγνώστων παραμέτρων
- ✓ $\delta X_0, \delta Y_0, \delta Z_0, \delta \omega, \delta \varphi, \delta \kappa$ είναι οι μεταβολές των προσωρινών τιμών και ουσιαστικώς οι νέοι άγνωστοι της συνόρθωσης και
- ✓ οι συντελεστές των αγνώστων, που είναι οι μερικές παράγωγοι των αρχικών συναρτήσεων ως προς τους αγνώστους, παίρνουν τιμές για τις προσωρινές τιμές των αγνώστων

Οι μερικές παράγωγοι των αρχικών εξισώσεων ως προς τις άγνωστες παραμέτρους με βάση το συμβολισμό των εξισώσεων (1) προσδιορίζονται ως εξής:

$$\alpha_1 = \frac{\partial F_x}{\partial X_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_1 r_{31} + \Pi r_{11}) \quad \beta_1 = \frac{\partial F_y}{\partial X_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_2 r_{31} + \Pi r_{21})$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial F_x}{\partial Y_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_1 r_{32} + \Pi r_{12}) \quad \beta_2 = \frac{\partial F_y}{\partial Y_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_2 r_{32} + \Pi r_{22})$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial F_x}{\partial Z_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_1 r_{33} + \Pi r_{13}) \quad \beta_3 = \frac{\partial F_y}{\partial Z_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_2 r_{33} + \Pi r_{23})$$

Για να διευκολυνθεί η κατανόηση του υπολογισμού των υπολοίπων συντελεστών δίνεται παρακάτω η παραγωγή, ως προς τις τρεις στροφές ω , φ και κ των στοιχείων του πίνακα στροφής R:

$\vartheta r_{ij} / \dots$	$\vartheta \omega$	$\vartheta \varphi$	$\vartheta \kappa$
r_{11}	0	$-\sin \varphi \cos \kappa = f_{11}$	r_{21}
r_{12}	$-r_{13}$	$\sin \omega \cos \varphi \cos \kappa = f_{12}$	r_{22}
r_{13}	r_{12}	$-\cos \omega \cos \varphi \cos \kappa = f_{13}$	r_{23}
r_{21}	0	$\sin \varphi \sin \kappa = f_{21}$	$-r_{11}$
r_{22}	$-r_{23}$	$-\sin \omega \cos \varphi \sin \kappa = f_{22}$	$-r_{12}$
r_{23}	r_{22}	$\cos \omega \cos \varphi \sin \kappa = f_{23}$	$-r_{13}$
r_{31}	0	$\cos \varphi = f_{31}$	0
r_{32}	$-r_{33}$	$\sin \omega \sin \varphi = f_{32}$	0
r_{33}	r_{32}	$-\cos \omega \sin \varphi = f_{33}$	0

Με βάση τα παραπάνω οι υπόλοιποι συντελεστές των εξισώσεων παρατήρησης για την Οπισθοτομία είναι:

$$\alpha_4 = \frac{\partial F_x}{\partial \omega} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi (-r_{13}(Y - Y_o) + r_{12}(Z - Z_o)) + A_1(-r_{33}(Y - Y_o) + r_{32}(Z - Z_o))]$$

$$\alpha_5 = \frac{\partial F_x}{\partial \phi} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi (f_{11}(X - X_o) + f_{12}(Y - Y_o) + f_{13}(Z - Z_o)) - A_1(f_{31}(X - X_o) + f_{32}(Y - Y_o) + f_{33}(Z - Z_o))]$$

$$\alpha_6 = \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} = -\frac{c}{\Pi} [r_{21}(X - X_o) + r_{22}(Y - Y_o) + r_{23}(Z - Z_o)]$$

$$\beta_4 = \frac{\partial F_y}{\partial \omega} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi (-r_{23}(Y - Y_o) + r_{22}(Z - Z_o)) - A_2(-r_{33}(Y - Y_o) + r_{32}(Z - Z_o))]$$

$$\beta_5 = \frac{\partial F_y}{\partial \phi} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi (f_{21}(X - X_o) + f_{22}(Y - Y_o) + f_{23}(Z - Z_o)) - A_2(f_{31}(X - X_o) + f_{32}(Y - Y_o) + f_{33}(Z - Z_o))]$$

$$\beta_6 = \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} = -\frac{c}{\Pi} [-r_{11}(X - X_o) - r_{12}(Y - Y_o) - r_{13}(Z - Z_o)]$$

4. Προσωρινές τιμές

Για τον υπολογισμό των προσωρινών τιμών ακολουθούνται διάφορες τεχνικές. Για μεν τα γωνιακά μεγέθη στην περίπτωση αεροφωτογραφίας, που κατά 99% θα πρόκειται για σχεδόν κατακόρυφη λήψη, οι προσωρινές τιμές των γωνιών λαμβάνονται ως 0, με την εξαίρεση της κ , όπου πρέπει να γίνεται ένας σχετικός χονδρικός έλεγχος για τον αζιμουθιακό προσανατολισμό της γραμμής πτήσης. Οι προσωρινές τιμές των γραμμικών μεγεθών μπορεί να αντληθούν από ένα διατιθέμενο χάρτη. Σε αντίθετη περίπτωση, όπως άλλωστε και στην παρούσα άσκηση, η μόνη διατιθέμενη πληροφορία για το αντικείμενο είναι τα δεδομένα φωτοσταθερά. Έτσι από τις οριζοντιογραφικές συντεταγμένες των φωτοσταθερών είναι δυνατόν – παίρνοντας, για παράδειγμα, το μέσο όρο - να υπολογιστούν κάποιες προσωρινές συντεταγμένες για τα X_o και Y_o :

$$X_o^{(o)} = \bar{X}_i = 6406.94 \text{ m} \quad \text{και} \quad Y_o^{(o)} = \bar{Y}_i = 11961.70 \text{ m}$$

Για το υψόμετρο πτήσης (Z_0) θα χρειαστεί να εκτιμηθεί η κλίμακα των εικόνων. Αυτή θα μπορούσε να υπολογιστεί εύκολα υποθέτοντας ότι οι αεροφωτογραφία είναι αυστηρά κατακόρυφη. Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση:

$$\frac{x_a}{X - X_0} = \frac{y_a}{Y - Y_0} = \frac{-c}{Z - Z_0} = \frac{1}{k}$$

Από απλή εφαρμογή της, τυχαία για τα x του πρώτου φωτοσταθερού ($\Phi 1$) προκύπτει:

$$\frac{-73.206 \text{ mm}}{(6050.75 - 6406.94) \text{ m}} \approx \frac{1}{4865}$$

Με τη βοήθεια της κλίμακας υπολογίζεται μια προσέγγιση του ύψους πτήσης:

$$-(Z - Z_0) = c \cdot k = 152.34 \text{ mm} \cdot 4865/1000 = 741 \text{ m}$$

Το ύψος πτήσης προστιθέμενο στο μέσο ανάγλυφο του εδάφους (μέσος όρος των Z των φωτοσταθερών) δίνει μια καλή προσέγγιση για το Z_0 :

$$Z_0 = H + \bar{Z}_i = 741 + 203.12 = 944.12 \text{ m}$$

5. Συμβατότητα μονάδων

Δεν απομένει πλέον παρά η αντικατάσταση όλων των τιμών στις εξισώσεις παρατήρησης και η επίλυση του συστήματος σύμφωνα με τη MET.

Ένα σημείο στο οποίο θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή είναι η συμβατότητα των μονάδων. Θα πρέπει, δηλαδή, να διασφαλίζεται ότι όλα τα μεγέθη είναι σε τέτοιες μονάδες ώστε το αποτέλεσμα της επίλυσης να είναι και αυτό στις επιθυμητές μονάδες.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τις εξής μονάδες:

A. Οι εικονοσυντεταγμένες μετρώνται σε χιλιοστά (mm) άρα και το δεύτερο μέλος των εξισώσεων παρατήρησης πρέπει να είναι σε χιλιοστά (mm)

B. Η σταθερά της μηχανής δίνεται σε χιλιοστά (mm)

Γ. Οι γεωδαιτικές συντεταγμένες των φωτοσταθερών δίνονται σε μέτρα (m)

Δ. Τα γωνιακά μεγέθη δίνονται σε βαθμούς, ή καλύτερα σε δευτερόλεπτα (cc)

Οι διορθώσεις $\delta\omega$, $\delta\phi$, $\delta\kappa$ είναι επιθυμητό να προσδιοριστούν σε cc, έτσι οι συντελεστές των αντίστοιχων μεγεθών διαιρούνται με ρ^{cc} .

Οι διορθώσεις δX_0 , δY_0 , δZ_0 είναι επιθυμητό να προσδιοριστούν σε μέτρα οπότε δεν χρειάζεται καμία επέμβαση στους συντελεστές

Για να διασφαλιστεί επομένως η επιθυμητή συμβατότητα των μονάδων θα πρέπει οι συντελεστές των εξισώσεων παρατήρησης που αναφέρονται στα μεγέθη $\delta\omega$,

$\delta\phi$, $\delta\kappa$, δηλαδή οι μερικές παράγωγοι, να πολλαπλασιάζονται με $\frac{1}{\rho^{cc}} = \frac{1}{636620}$

6. Επίλυση

Κατόπιν των παραπάνω το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial X_o} & \frac{\partial F_x}{\partial Y_o} & \frac{\partial F_x}{\partial Z_o} & \frac{\partial F_x}{\partial \omega} & \frac{\partial F_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_y}{\partial X_o} & \frac{\partial F_y}{\partial Y_o} & \frac{\partial F_y}{\partial Z_o} & \frac{\partial F_y}{\partial \omega} & \frac{\partial F_y}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_z}{\partial X_o} & \frac{\partial F_z}{\partial Y_o} & \frac{\partial F_z}{\partial Z_o} & \frac{\partial F_z}{\partial \omega} & \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_z}{\partial \kappa} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial F_y}{\partial X_o} & \frac{\partial F_y}{\partial Y_o} & \frac{\partial F_y}{\partial Z_o} & \frac{\partial F_y}{\partial \omega} & \frac{\partial F_y}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_o \\ dY_o \\ dZ_o \\ d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - F_x^{(o)} + u_{x1} \\ y_1 - F_y^{(o)} + u_{y1} \\ \vdots \\ y_5 - F_y^{(o)} + u_{y5} \end{pmatrix}$$

Επισημαίνεται ότι οι εικονοσυντεταγμένες μετρώνται στα σύγχρονα όργανα με την ίδια ακρίβεια, τόσο οι x και y , όσο και για κάθε σημείο. Συνεπώς οι παρατηρήσεις στην προκειμένη περίπτωση είναι ισοβαρείς και έτσι δεν απαιτείται πίνακας βαρών.

Σε μορφή πινάκων έχουμε συνεπώς:

$$A \cdot \delta x = \delta l + u$$

Η επίλυση ακολουθεί τη γνωστή διαδικασία των διαδοχικών προσεγγίσεων, δεδομένου ότι από κάθε επίλυση του συστήματος προκύπτουν τιμές για τις διαφορικές μεταβολές των προσωρινών τιμών, ώστε αυτές προστιθέμενες να πλησιάσουν την καλύτερη τιμή:

$$(X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa)^{(1)} = (X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa)^{(0)} + (dX_o, dY_o, dZ_o, d\omega, d\varphi, d\kappa)$$

Η πρώτη επίλυση του συστήματος, όπως διατυπώθηκε παραπάνω δίνει:

$$A^1 = \begin{bmatrix} -0,205193826 & 0 & 0,098445609 & 7,15664E-05 & 0,000294376 & 0,000149169 \\ 0 & -0,205193826 & -0,127911024 & -0,000332282 & -7,15664E-05 & 0,000114806 \\ -0,221901765 & 0 & -0,119871947 & -9,20289E-05 & 0,000309126 & 0,00017036 \\ 0 & -0,221901765 & -0,157977172 & -0,000360578 & 9,20289E-05 & -0,000129268 \\ -0,196588035 & 0 & -0,01097455 & -1,52391E-06 & 0,000240041 & 2,72979E-05 \\ 0 & -0,196588035 & -0,022426034 & -0,000242409 & 1,52391E-06 & -1,33587E-05 \\ -0,199706353 & 0 & 0,079689333 & -6,93536E-05 & 0,000277397 & -0,000173804 \\ 0 & -0,199706353 & 0,145050346 & -0,000365532 & 6,93536E-05 & 9,54865E-05 \\ -0,206333297 & 0 & -0,068876509 & 5,257E-05 & 0,00026596 & -0,000157484 \\ 0 & -0,206333297 & 0,135791187 & -0,000342938 & -5,257E-05 & -7,98795E-05 \end{bmatrix}$$

$$N^1 = \begin{bmatrix} 0,212447812 & 0 & 0,006853882 & 9,03937E-06 & -0,000286463 & -6,57408E-06 \\ 0 & 0,212447812 & 0,008724937 & 0,000339608 & -9,03937E-06 & 5,16592E-06 \\ 0,006853882 & 0,008724937 & 0,116575419 & 1,42597E-05 & -9,41994E-06 & -5,0822E-21 \\ 9,03937E-06 & 0,000339608 & 1,42597E-05 & 5,71577E-07 & -3,00994E-08 & 2,92257E-09 \\ -0,000286463 & -9,03937E-06 & -9,41994E-06 & -3,00994E-08 & 4,08686E-07 & 3,71821E-09 \\ -6,57408E-06 & 5,16592E-06 & -5,0822E-21 & 2,92257E-09 & 3,71821E-09 & 1,52596E-07 \end{bmatrix}$$

$$\delta \ell^1 = \begin{bmatrix} -0,11801126 \\ -14,81070249 \\ -16,71648873 \\ -14,00848785 \\ -11,12039839 \\ -6,517382285 \\ -9,291383288 \\ 4,298304738 \\ -16,57590443 \\ -3,615650883 \end{bmatrix} \quad \delta x^1 = \begin{bmatrix} 108.09m \\ -0.20m \\ 53.72m \\ 21068^{cc} \\ 42663^{cc} \\ 16014^{cc} \end{bmatrix} \rightarrow X^1 = \begin{bmatrix} X_0^1 \\ Y_0^1 \\ Z_0^1 \\ \omega^1 \\ \varphi^1 \\ \kappa^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6515.03m \\ 11961.68m \\ 997.84m \\ 2.1068^g \\ 4.2663^g \\ 1.6014^g \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_0 = 0.4599mm$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να πραγματοποιηθεί ένας έλεγχος κατά πόσο οι υπολογισθείσες τιμές των μεταβολών των προσωρινών τιμών έχουν πρακτικό νόημα ή όχι. Δηλαδή εάν εφαρμοζόμενες θα μεταβάλουν τις αρχικές τιμές κατά ποσότητα μεγαλύτερη από κάποιο όριο. Εν προκειμένω – εφόσον δεν δίνεται ρητώς - η τιμή του ορίου μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής:

Η προσέγγιση με την οποία δίνονται οι συντεταγμένες των φωτοσταθερών είναι 5cm. Συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιζητήσει κανείς προσέγγιση υπολογισμού των γραμμικών αγνώστων μεγαλύτερη από αυτήν. Είναι μάλιστα λογικό να θεωρείται ρεαλιστική προσέγγιση μια τάξη μεγέθους χειρότερη από αυτήν των φωτοσταθερών, δεδομένου ότι στη διαδικασία υπεισέρχονται μετρήσεις και υπολογισμοί, οι οποίοι είναι αναπόφευκτο ότι θα εισαγάγουν κάποιες αβεβαιότητες. Έτσι το επιζητούμενο όριο στον υπολογισμό των γραμμικών στοιχείων του εξωτερικού προσανατολισμού εκτιμάται σε 0.10m. Το αντίστοιχο όριο για τα γωνιακά μεγέθη υπολογίζεται θεωρώντας ότι 0.10 m για ύψος 740 m αντιστοιχούν σε **$\delta\alpha = \arctan(0.10/740) \times \rho^{cc} = 86^{cc}$** .

Ένα πιο ασφαλές κριτήριο είναι η σύγκλιση του a posteriori τυπικού σφάλματος της μονάδας βάρους $\hat{\sigma}_0$, που στην συγκεκριμένη περίπτωση ταυτίζεται με το a posteriori τυπικό σφάλμα της μίας μέτρησης. Δηλαδή γίνεται έλεγχος αν το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους που προκύπτει σε κάθε συνόρθωση διαφέρει από εκείνο της αμέσως προηγούμενης.

Έτσι τα αποτελέσματα της πρώτης επίλυσης του συστήματος των κανονικών εξισώσεων ελέγχονται εάν πληρούν τα παραπάνω κριτήρια με βάση το μέγεθος των τιμών του πίνακα δx^1 . Από την πρώτη επίλυση προκύπτουν μεγάλες

διορθώσεις στις προσεγγιστικές τιμές και γι'αυτό το λόγο γίνεται και δεύτερη συνόρθωση αυτή τη φορά με προσεγγιστικές τιμές εκείνες του πίνακα X^1 .

Έτσι υπολογίζονται οι νέες διορθωμένες αρχικές τιμές και επαναλαμβάνεται η κατάσταση των εξισώσεων παρατήρησης, η διαμορφωση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων και η εκ νέου επίλυσή του.

$$\delta x^2 = \begin{bmatrix} 13.162\text{m} \\ -1.250\text{m} \\ -2.770\text{m} \\ 2547.25^{\text{cc}} \\ 5092.42^{\text{cc}} \\ -1375.31^{\text{cc}} \end{bmatrix} \rightarrow X^2 = \begin{bmatrix} X_0^2 \\ Y_0^2 \\ Z_0^2 \\ \omega^2 \\ \varphi^2 \\ \kappa^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6528.19\text{m} \\ 11960.43\text{m} \\ 995.070\text{m} \\ 2.3615^{\text{g}} \\ 4.7755^{\text{g}} \\ 1.4638^{\text{g}} \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_{0_2} = 0.0058\text{mm}$$

Κατόπιν επαναλαμβάνεται ο έλεγχος και όλη η διαδικασία, έως ότου οι υπολογιζόμενες τιμές να πάψουν να συμβάλλουν στην ουσιαστική μεταβολή των αρχικών τιμών. Αυτό επιτυγχάνεται με την τρίτη συνόρθωση.

$$\delta x^3 = \begin{bmatrix} -0.09\text{m} \\ -0.06\text{m} \\ -0.08\text{m} \\ -39.97^{\text{cc}} \\ -45.61^{\text{cc}} \\ -23.81^{\text{cc}} \end{bmatrix} \rightarrow X^3 = \begin{bmatrix} X_0^3 \\ Y_0^3 \\ Z_0^3 \\ \omega^3 \\ \varphi^3 \\ \kappa^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6528.10\text{m} \\ 11960.48\text{m} \\ 994.99\text{m} \\ 2.3575^{\text{g}} \\ 4.7709^{\text{g}} \\ 1.4615^{\text{g}} \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_{03} = 0.0008\text{mm}$$

Παρατηρούμε όμως πως το δεύτερο κριτήριο, σχετικά με το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους, δεν ικανοποιείται αφού $\hat{\sigma}_{0_2} \neq \hat{\sigma}_{0_3}$. Έτσι παραγματοποιείται και τέταρτη συνόρθωση που τα αποτελέσματα της οποίας είναι:

$$A^4 = \begin{bmatrix} -0,173573651 & -0,007848558 & 0,099853948 & 6,30003\text{E-}05 & 0,000295865 & 0,000125902 \\ -0,002980849 & -0,176935342 & -0,101699099 & -0,000294605 & -6,74994\text{E-}05 & 0,000114992 \\ -0,213537793 & -0,002036893 & -0,073662751 & -5,90524\text{E-}05 & 0,000282098 & 0,000148356 \\ -0,004881767 & -0,202527969 & -0,136223069 & -0,000339429 & 5,62426\text{E-}05 & -0,000103011 \\ -0,182292062 & -0,004823328 & 0,016672773 & -3,90969\text{E-}06 & 0,000239309 & 1,70603\text{E-}05 \\ 0,003213621 & -0,182422165 & -0,020098961 & -0,000240709 & -5,81372\text{E-}06 & 4,10935\text{E-}06 \\ -0,178310274 & -0,00790954 & 0,098789911 & -9,57572\text{E-}05 & 0,000288096 & -0,000167052 \\ 0,013923791 & -0,189847144 & 0,121703548 & -0,000348339 & 6,86588\text{E-}05 & 0,000110083 \\ -0,20343298 & -0,003492215 & -0,030154291 & 1,86287\text{E-}05 & 0,000252186 & -0,000163162 \\ 0,014837615 & -0,20551675 & 0,128575047 & -0,000352661 & -4,47493\text{E-}05 & -5,44138\text{E-}05 \end{bmatrix}$$

$$N^4 = \begin{bmatrix} 0,1825932 & 3,44003E-05 & -0,011616536 & 7,35103E-06 & -0,000257691 & 7,23561E-06 \\ 3,44003E-05 & 0,184044382 & -0,001669917 & 0,000303726 & -9,43545E-06 & -9,43068E-06 \\ -0,011616536 & -0,001669917 & 0,086990417 & -6,14651E-06 & 3,55319E-05 & -9,98583E-07 \\ 7,35103E-06 & 0,000303726 & -6,14651E-06 & 5,22643E-07 & -2,77845E-08 & -6,99663E-09 \\ -0,000257691 & -9,43545E-06 & 3,55319E-05 & -2,77845E-08 & 3,85451E-07 & -9,67699E-09 \\ 7,23561E-06 & -9,43068E-06 & -9,98583E-07 & -6,99663E-09 & -9,67699E-09 & 1,31611E-07 \end{bmatrix}$$

$$\delta \ell^4 = \begin{bmatrix} 0,000286679 \\ 0,000982248 \\ -0,000755665 \\ -0,000149138 \\ 9,70288E-05 \\ 6,35682E-05 \\ 0,000795396 \\ -6,94992E-05 \\ -0,000318038 \\ -0,00066275 \end{bmatrix} \quad \delta x^4 = \begin{bmatrix} -7.03 \times 10^{-5} \text{m} \\ -3.78 \times 10^{-4} \text{m} \\ 1.62 \times 10^{-5} \text{m} \\ 0.19^{\text{cc}} \\ -0.06^{\text{cc}} \\ -5.1 \times 10^{-3 \text{cc}} \end{bmatrix} \rightarrow X^4 = \begin{bmatrix} X_0^4 \\ Y_0^4 \\ Z_0^4 \\ \omega^4 \\ \varphi^4 \\ \kappa^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6528.10 \text{m} \\ 11960.49 \text{m} \\ 995.00 \text{m} \\ 2.3576^{\text{g}} \\ 4.7709^{\text{g}} \\ 1.4615^{\text{g}} \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_{0_4} = 0.0008 \text{mm}$$

$$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 8,49142E-05 & -1,16508E-06 & -1,22201E-05 & 0,00241796 & 0,058029749 & -0,000449248 \\ -1,16508E-06 & 9,83306E-05 & -1,3365E-06 & -0,057211613 & -0,002274963 & 0,003891151 \\ -1,22201E-05 & -1,3365E-06 & 1,02351E-05 & 0,000585196 & -0,009103293 & 1,5487E-05 \\ 0,00241796 & -0,057211613 & 0,000585196 & 34,6834844 & 2,607126526 & -2,192520761 \\ 0,058029749 & -0,002274963 & -0,009103293 & 2,607126526 & 41,5965523 & -0,2253251 \\ -0,000449248 & 0,003891151 & 1,5487E-05 & -2,192520761 & -0,2253251 & 5,546004463 \end{bmatrix}$$

Έτσι τα τελικά αποτελέσματα είναι:

$X_0(m)$	6528.10 ± 0.009
$Y_0(m)$	11960.49 ± 0.010
$Z_0(m)$	995.00 ± 0.003
$\omega (grad)$	2.3576 ± 0.0006
$\varphi (grad)$	4.7709 ± 0.0006
$\kappa (grad)$	1.4615 ± 0.0002