



Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων & Φωτογραμμετρία

Φωτογραμμετρική Οπισθοτομία

Υποδειγματικά λυμένη άσκηση

Δεδομένα

Να συνταχθεί πρόγραμμα Η/Υ σε γλώσσα προγραμματισμού της επιλογής σας που να επιλύει το θεμελιώδες πρόβλημα της φωτογραμμετρικής οπισθοτομίας.

Τα δεδομένα είναι οι γεωδαιτικές συντεταγμένες πέντε φωτοσταθερών (Φ_i), καθώς και οι μετρημένες (και διορθωμένες από συστηματικά σφάλματα, δηλ. συρρίκνωση, πρωτεύον σημείο και ακτινική διαστροφή) εικονοσυντεταγμένες τους. Δίνεται ακόμα η σταθερά της μηχανής $c=152.34\text{mm}$

Συντεταγμένες φωτοσταθερών (ΣΠΑ/Φ)					
α/α	$X(\text{m})$	$Y(\text{m})$	$Z(\text{m})$	$x(\text{mm})$	$y(\text{mm})$
$\Phi 1$	6050.75	12424.50	201.70	-73.206	80.153
$\Phi 2$	6777.80	12450.45	257.60	65.578	94.446
$\Phi 3$	6450.20	12050.10	169.20	-2.616	10.861
$\Phi 4$	6102.55	11407.65	181.30	-70.080	-106.349
$\Phi 5$	6653.40	11475.80	205.80	34.277	-103.873

Επίλυση

1. Εισαγωγή

Το πρόβλημα που τίθεται αφορά στον προσδιορισμός των στοιχείων του εξωτερικού προσανατολισμού (X_0 , Y_0 , Z_0 , ω , ϕ , κ) μιας λήψης από μετρήσεις των εικονοσυντεταγμένων x_i , y_i πέντε φωτοσταθερών σημείων. Για τα σημεία αυτά θεωρούνται γνωστές οι συντεταγμένες X_i , Y_i στην προβολή Hatt καθώς και τα ορθομετρικά τους υψόμετρα Z_i (H_i).

Έτσι, επειδή τα μετρημένα στοιχεία είναι $n=10$ (δύο εικονοσυντεταγμένες για κάθε ένα από τα πέντε φωτοσταθερά), ενώ οι άγνωστες ανεξάρτητες καθοριστικές παράμετροι είναι $m=6$ (τα στοιχεία του εξωτερικού προσανατολισμού) απαιτείται

συνόρθωση. Στη συγκεκριμένη περίπτωση η συνόρθωση γίνεται με τη μέθοδο των εμμέσων παρατηρήσεων.

2. Συνθήκη Συγγραμμικότητας

Ως σχέσεις που συνδέουν το διάνυσμα των μετρήσεων με το διάνυσμα των ανεξάρτητων καθοριστικών παραμέτρων (εξισώσεις παρατήρησης) θεωρούνται οι εξισώσεις της Συνθήκης Συγγραμμικότητας. Η συνθήκη αυτή εκφράζει με μαθηματικό τρόπο το γεγονός ότι το σημείο M στο αντικείμενο, το προβολικό κέντρο O και η εικόνα μ του σημείου στη φωτογραφία βρίσκονται πάνω σε ευθεία ή, Ισοδύναμα, ότι τα διανύσματα OM και $O\mu$ είναι συγγραμμικά.

Οι εξισώσεις αυτές διατυπώνονται υπο μορφή πινάκων ως εξής:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ -c \end{bmatrix} = \lambda \cdot \mathcal{R}_{\omega\phi\kappa} \cdot \begin{bmatrix} X - X_o \\ Y - Y_o \\ Z - Z_o \end{bmatrix}$$

Δεδομένου ότι η κλίμακα λ αφορά στο συγκεκριμένο σημείο και διαφοροποιείται από σημείο σε σημείο της λήψης, είναι επιθυμητή η εξάλειψή της. Για το λόγο αυτό με διαίρεση της πρώτης και δεύτερης με την τρίτη εξίσωση προκύπτουν οι εξισώσεις της Συνθήκης Συγγραμμικότητας:

$$\begin{aligned} x &= -c \frac{r_{11}(X - X_o) + r_{12}(Y - Y_o) + r_{13}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} = -c \frac{A_1}{\Pi} \\ y &= -c \frac{r_{21}(X - X_o) + r_{22}(Y - Y_o) + r_{23}(Z - Z_o)}{r_{31}(X - X_o) + r_{32}(Y - Y_o) + r_{33}(Z - Z_o)} = -c \frac{A_2}{\Pi} \end{aligned} \quad (1)$$

Όπου r_{ij} τα στοιχεία του πίνακα στροφής R :

$$\mathcal{R}_{\omega\phi\kappa} = \begin{pmatrix} \cos\phi \cos\kappa & \sin\omega \sin\phi \cos\kappa + \cos\omega \sin\kappa & -\cos\omega \sin\phi \cos\kappa + \sin\omega \sin\kappa \\ -\cos\phi \sin\kappa & -\sin\omega \sin\phi \sin\kappa + \cos\omega \cos\kappa & \cos\omega \sin\phi \sin\kappa + \sin\omega \cos\kappa \\ \sin\phi & -\sin\omega \cos\phi & \cos\omega \cos\phi \end{pmatrix}$$

3. Παραγωγή εξισώσεων της Συνθήκης Συγγραμμικότητας

Οι εξισώσεις της Συνθήκης Συγγραμμικότητας δεν είναι, προφανώς, γραμμικές ως προς τις άγνωστες παραμέτρους. Για να μπορεί να εφαρμοστεί η μέθοδος των εμμέσων παρατηρήσεων απαιτείται γραμμικοποίηση κατά Taylor των εξισώσεων αυτών. Η γραμμικοποίηση πραγματοποιείται γύρω από κάποιες προσωρινές τιμές $(X_o, Y_o, Z_o, \omega, \phi, \kappa)^{(o)}$ για τους αγνώστους.

Για τη γραμμικοποίηση θεωρούνται οι προηγούμενες εξισώσεις των εικονοσυντεταγμένων x και y ως συναρτήσεις F_x και F_y αντίστοιχα:

$$x = -c \frac{r_{11}(X - X_0) + r_{12}(Y - Y_0) + r_{13}(Z - Z_0)}{r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} = F_x$$

$$y = -c \frac{r_{21}(X - X_0) + r_{22}(Y - Y_0) + r_{23}(Z - Z_0)}{r_{31}(X - X_0) + r_{32}(Y - Y_0) + r_{33}(Z - Z_0)} = F_y$$

Η γραμμικοποίηση των εξισώσεων αυτών ως προς τους αγνώστους της οπισθοτομίας με ταυτόχρονη παράλειψη των διαφορικών ανώτερης τάξης δίνει:

$$x = F_x = F_x^{(0)} + \frac{\partial F_x}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial F_x}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial F_x}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial F_x}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F_x}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} d\kappa$$

$$y = F_y = F_y^{(0)} + \frac{\partial F_y}{\partial X_0} dX_0 + \frac{\partial F_y}{\partial Y_0} dY_0 + \frac{\partial F_y}{\partial Z_0} dZ_0 + \frac{\partial F_y}{\partial \omega} d\omega + \frac{\partial F_y}{\partial \varphi} d\varphi + \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} d\kappa$$

Όπου:

- ✓ $F_x^{(0)}$ και $F_y^{(0)}$ είναι οι τιμές των παρατηρήσεων x και y για τις προσωρινές τιμές
- ✓ Οι συντελεστές $\frac{\partial F_x}{\partial A_i}$ και $\frac{\partial F_y}{\partial A_i}$, που είναι οι μερικές παράγωγοι των αρχικών συναρτήσεων ως προς τους αγνώστους, παίρνουν τιμές για τις προσωρινές τιμές των αγνώστων και
- ✓ $dX_0, dY_0, dZ_0, d\omega, d\varphi, d\kappa$ είναι οι μεταβολές των προσωρινών τιμών και ουσιαστικώς οι νέοι άγνωστοι της συνόρθωσης.

Οι μερικές παράγωγοι των αρχικών εξισώσεων ως προς τις άγνωστες παραμέτρους με βάση το συμβολισμό των εξισώσεων (1) προσδιορίζονται ως εξής:

$$\alpha_1 = \frac{\partial F_x}{\partial X_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_1 r_{31} + \Pi r_{11}) \quad \beta_1 = \frac{\partial F_y}{\partial X_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_2 r_{31} + \Pi r_{21})$$

$$\alpha_2 = \frac{\partial F_x}{\partial Y_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_1 r_{32} + \Pi r_{12}) \quad \beta_2 = \frac{\partial F_y}{\partial Y_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_2 r_{32} + \Pi r_{22})$$

$$\alpha_3 = \frac{\partial F_x}{\partial Z_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_1 r_{33} + \Pi r_{13}) \quad \beta_3 = \frac{\partial F_y}{\partial Z_0} = \frac{c}{\Pi^2} (-A_2 r_{33} + \Pi r_{23})$$

Για να διευκολυνθεί η κατανόηση του υπολογισμού των υπολοίπων συντελεστών δίνεται παρακάτω η παραγωγή, ως προς τις τρεις στροφές ω , φ και κ των στοιχείων του πίνακα στροφής R:

$Mr_{ij} / \dots$	$M\omega$	$M\varphi$	$M\kappa$
r_{11}	0	$-\sin\varphi \cos\kappa = f_{11}$	r_{21}
r_{12}	$-r_{13}$	$\sin\omega \cos\varphi \cos\kappa = f_{12}$	r_{22}
r_{13}	r_{12}	$-\cos\omega \cos\varphi \cos\kappa = f_{13}$	r_{23}
r_{21}	0	$\sin\varphi \sin\kappa = f_{21}$	$-r_{11}$
r_{22}	$-r_{23}$	$-\sin\omega \cos\varphi \sin\kappa = f_{22}$	$-r_{12}$
r_{23}	r_{22}	$\cos\omega \cos\varphi \sin\kappa = f_{23}$	$-r_{13}$
r_{31}	0	$\cos\varphi = f_{31}$	0
r_{32}	$-r_{33}$	$\sin\omega \sin\varphi = f_{32}$	0
r_{33}	r_{32}	$-\cos\omega \sin\varphi = f_{33}$	0

Με βάση τα παραπάνω οι υπόλοιποι συντελεστές των εξισώσεων παρατήρησης για την Οπισθοτομία είναι:

$$\alpha_4 = \frac{\partial F_x}{\partial \omega} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi(-r_{13}(Y-Y_o) + r_{12}(Z-Z_o)) - A_1(-r_{33}(Y-Y_o) + r_{32}(Z-Z_o))]$$

$$\alpha_5 = \frac{\partial F_x}{\partial \varphi} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi(f_{11}(X-X_o) + f_{12}(Y-Y_o) + f_{13}(Z-Z_o)) - A_1(f_{31}(X-X_o) + f_{32}(Y-Y_o) + f_{33}(Z-Z_o))]$$

$$\alpha_6 = \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} = -\frac{c}{\Pi} [r_{21}(X-X_o) + r_{22}(Y-Y_o) + r_{23}(Z-Z_o)]$$

$$\beta_4 = \frac{\partial F_y}{\partial \omega} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi(-r_{23}(Y-Y_o) + r_{22}(Z-Z_o)) - A_2(-r_{33}(Y-Y_o) + r_{32}(Z-Z_o))]$$

$$\beta_5 = \frac{\partial F_y}{\partial \varphi} = -\frac{c}{\Pi^2} [\Pi(f_{21}(X-X_o) + f_{22}(Y-Y_o) + f_{23}(Z-Z_o)) - A_2(f_{31}(X-X_o) + f_{32}(Y-Y_o) + f_{33}(Z-Z_o))]$$

$$\beta_6 = \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} = -\frac{c}{\Pi} [-r_{11}(X-X_o) - r_{12}(Y-Y_o) - r_{13}(Z-Z_o)]$$

4. Προσωρινές τιμές

Για τον υπολογισμό των προσωρινών τιμών ακολουθούνται διάφορες τεχνικές. Για μεν τα γωνιακά μεγέθη στην περίπτωση αεροφωτογραφίας, που κατά 99% θα πρόκειται για σχεδόν κατακόρυφη λήψη, οι προσωρινές τιμές των γωνιών λαμβάνονται ως 0, με την εξαίρεση της κ , όπου πρέπει να γίνεται ένας σχετικός χονδρικός έλεγχος για τον αζιμουθιακό προσανατολισμό της γραμμής πτήσης. Οι προσωρινές τιμές των γραμμικών μεγεθών μπορεί να αντληθούν από ένα διατιθέμενο χάρτη. Σε αντίθετη περίπτωση, όπως άλλωστε και στην παρούσα άσκηση, η μόνη διατιθέμενη πληροφορία για το αντικείμενο είναι τα δεδομένα φωτοσταθερά. Έτσι από τις οριζοντιογραφικές συντεταγμένες των φωτοσταθερών είναι δυνατόν – παίρνοντας, για παράδειγμα, το μέσο όρο - να υπολογιστούν κάποιες προσωρινές συντεταγμένες για τα X_0 και Y_0 :

$$X_0^{(0)} = \bar{X}_i = 6406.94 \text{ m} \quad \text{και} \quad Y_0^{(0)} = \bar{Y}_i = 11961.70 \text{ m}$$

Για το υψόμετρο πτήσης (Z_0) θα χρειαστεί να εκτιμηθεί η κλίμακα των εικόνων. Αυτή θα μπορούσε να υπολογιστεί εύκολα υποθέτοντας ότι οι αεροφωτογραφία είναι αυστηρά κατακόρυφη. Στην περίπτωση αυτή ισχύει η σχέση:

$$\frac{x_a}{X - X_0} = \frac{y_a}{Y - Y_0} = \frac{-c}{Z - Z_0} = \frac{c}{H} = \frac{1}{k}$$

Από απλή εφαρμογή της, τυχαία για τα X του πρώτου φωτοσταθερού ($\Phi 1$) προκύπτει:

$$\frac{-73.206 \text{ mm}}{(6050.75 - 6406.94) \text{ m}} \approx \frac{1}{4865}$$

Με τη βοήθεια της κλίμακας υπολογίζεται μια προσέγγιση του ύψους πτήσης:

$$H = c \cdot \kappa = 152.34 \text{ mm} \cdot 4865/1000 = 741 \text{ m}$$

Το ύψος πτήσης προστιθέμενο στο μέσο ανάγλυφο του εδάφους (μέσος όρος των Z των φωτοσταθερών) δίνει μια καλή προσέγγιση για το Z_0 :

$$Z_0 = H + \bar{Z}_i = 741 + 203.12 = 944.12 \text{ m}$$

5. Συμβατότητα μονάδων

Δεν απομένει πλέον παρά η αντικατάσταση όλων των τιμών στις εξισώσεις παρατήρησης και η επίλυση του συστήματος σύμφωνα με τη MET.

Ένα σημείο στο οποίο θα πρέπει να δίνεται ιδιαίτερη προσοχή είναι η συμβατότητα των μονάδων. Θα πρέπει, δηλαδή, να διασφαλίζεται ότι όλα τα μεγέθη είναι σε τέτοιες μονάδες ώστε το αποτέλεσμα της επίλυσης να είναι και αυτό στις επιθυμητές μονάδες.

Στην προκειμένη περίπτωση έχουμε τις εξής μονάδες:

- A. Οι εικονοσυντεταγμένες μετρώνται σε χιλιοστά (mm)
- B. Η σταθερά της μηχανής δίνεται σε χιλιοστά (mm)
- Γ. Οι γεωδαιτικές συντεταγμένες των φωτοσταθερών δίνονται σε μέτρα (m)
- Δ. Τα γωνιακά μεγέθη δίνονται σε βαθμούς, ή καλύτερα σε δευτερόλεπτα (cc)

Για να διασφαλιστεί επομένως η επιθυμητή συμβατότητα των μονάδων θα πρέπει οι συντελεστές των εξισώσεων παρατήρησης, δηλαδή οι μερικές παράγωγοι, να πολλαπλασιάζονται με κατάλληλους συντελεστές. Οι συντελεστές αυτοί είναι:

1. Για τα γραμμικά μεγέθη: $\Sigma_1 = 1000$
2. Για τα γωνιακά μεγέθη: $\Sigma_2 = \frac{1000}{\rho^{cc}} = \frac{1000}{636620}$

6. Επίλυση

Κατόπιν των παραπάνω το σύστημα των εξισώσεων παρατήρησης διαμορφώνεται ως εξής:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_x}{\partial X_0} & \frac{\partial F_x}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_x}{\partial Z_0} & \frac{\partial F_x}{\partial \omega} & \frac{\partial F_x}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_x}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_y}{\partial X_0} & \frac{\partial F_y}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_y}{\partial Z_0} & \frac{\partial F_y}{\partial \omega} & \frac{\partial F_y}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_y}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_z}{\partial X_0} & \frac{\partial F_z}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_z}{\partial Z_0} & \frac{\partial F_z}{\partial \omega} & \frac{\partial F_z}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_z}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_\omega}{\partial X_0} & \frac{\partial F_\omega}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_\omega}{\partial Z_0} & \frac{\partial F_\omega}{\partial \omega} & \frac{\partial F_\omega}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_\omega}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_\varphi}{\partial X_0} & \frac{\partial F_\varphi}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_\varphi}{\partial Z_0} & \frac{\partial F_\varphi}{\partial \omega} & \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_\varphi}{\partial \kappa} \\ \frac{\partial F_\kappa}{\partial X_0} & \frac{\partial F_\kappa}{\partial Y_0} & \frac{\partial F_\kappa}{\partial Z_0} & \frac{\partial F_\kappa}{\partial \omega} & \frac{\partial F_\kappa}{\partial \varphi} & \frac{\partial F_\kappa}{\partial \kappa} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_0 \\ dY_0 \\ dZ_0 \\ d\omega \\ d\varphi \\ d\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - F_x^{(0)} + u_{x1} \\ y_1 - F_y^{(0)} + u_{y1} \\ z_1 - F_z^{(0)} + u_{z1} \\ \omega_1 - F_\omega^{(0)} + u_{\omega1} \\ \varphi_1 - F_\varphi^{(0)} + u_{\varphi1} \\ \kappa_1 - F_\kappa^{(0)} + u_{\kappa1} \end{pmatrix}$$

Επισημαίνεται ότι οι εικονοσυντεταγμένες μετρώνται στα σύγχρονα όργανα με την ίδια ακρίβεια, τόσο οι x και y, όσο και για κάθε σημείο. Συνεπώς οι παρατηρήσεις στην προκειμένη περίπτωση είναι ισοβαρείς και έτσι δεν απαιτείται πίνακας βαρών.

Σε μορφή πινάκων έχουμε συνεπώς:

$$A \cdot \delta x = \delta l + u$$

Η επίλυση ακολουθεί τη γνωστή διαδικασία των διαδοχικών προσεγγίσεων, δεδομένου ότι από κάθε επίλυση του συστήματος προκύπτουν τιμές για τις διαφορικές μεταβολές των προσωρινών τιμών, ώστε αυτές προστιθέμενες να πλησιάσουν την επιθυμητή αληθή τιμή:

$$(X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa)^{(1)} = (X_0, Y_0, Z_0, \omega, \varphi, \kappa)^{(0)} + (dX_0, dY_0, dZ_0, d\omega, d\varphi, d\kappa)$$

Η πρώτη επίλυση του συστήματος, όπως διατυπώθηκε παραπάνω δίνει:

$$A^1 = \begin{bmatrix} -0,205193826 & 0 & 0,098445609 & 7,15664E-05 & 0,000294376 & 0,000149169 \\ 0 & -0,205193826 & -0,127911024 & -0,000332282 & -7,15664E-05 & 0,000114806 \\ -0,221901765 & 0 & -0,119871947 & -9,20289E-05 & 0,000309126 & 0,00017036 \\ 0 & -0,221901765 & -0,157977172 & -0,000360578 & 9,20289E-05 & -0,000129268 \\ -0,196588035 & 0 & -0,01097455 & -1,52391E-06 & 0,000240041 & 2,72979E-05 \\ 0 & -0,196588035 & -0,022426034 & -0,000242409 & 1,52391E-06 & -1,33587E-05 \\ -0,199706353 & 0 & 0,079689333 & -6,93536E-05 & 0,000277397 & -0,000173804 \\ 0 & -0,199706353 & 0,145050346 & -0,000365532 & 6,93536E-05 & 9,54865E-05 \\ -0,206333297 & 0 & -0,068876509 & 5,257E-05 & 0,00026596 & -0,000157484 \\ 0 & -0,206333297 & 0,135791187 & -0,000342938 & -5,257E-05 & -7,98795E-05 \end{bmatrix}$$

$$N^1 = \begin{bmatrix} 0,212447812 & 0 & 0,006853882 & 9,03937E-06 & -0,000286463 & -6,57408E-06 \\ 0 & 0,212447812 & 0,008724937 & 0,000339608 & -9,03937E-06 & 5,16592E-06 \\ 0,006853882 & 0,008724937 & 0,116575419 & 1,42597E-05 & -9,41994E-06 & -5,0822E-21 \\ 9,03937E-06 & 0,000339608 & 1,42597E-05 & 5,71577E-07 & -3,00994E-08 & 2,92257E-09 \\ -0,000286463 & -9,03937E-06 & -9,41994E-06 & -3,00994E-08 & 4,08686E-07 & 3,71821E-09 \\ -6,57408E-06 & 5,16592E-06 & -5,0822E-21 & 2,92257E-09 & 3,71821E-09 & 1,52596E-07 \end{bmatrix}$$

$$\delta \ell^1 = \begin{bmatrix} -0,11801126 \\ -14,81070249 \\ -16,71648873 \\ -14,00848785 \\ -11,12039839 \\ -6,517382285 \\ -9,291383288 \\ 4,298304738 \\ -16,57590443 \\ -3,615650883 \end{bmatrix} \quad \delta x^1 = \begin{bmatrix} 108.09m \\ -0.20m \\ 53.72m \\ 21068^{cc} \\ 42663^{cc} \\ 16014^{cc} \end{bmatrix} \rightarrow X^1 = \begin{bmatrix} X_0^1 \\ Y_0^1 \\ Z_0^1 \\ \omega^1 \\ \varphi^1 \\ \kappa^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6515.03m \\ 11961.68m \\ 997.84m \\ 2.1068^g \\ 4.2663^g \\ 1.6014^g \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_{\ell^1} = 0.4599mm$$

Στο σημείο αυτό θα πρέπει να πραγματοποιηθεί ένας έλεγχος κατά πόσο οι υπολογισθείσες τιμές των μεταβολών των προσωρινών τιμών έχουν πρακτικό νόημα ή όχι. Δηλαδή εάν εφαρμοζόμενες θα μεταβάλουν τις αρχικές τιμές κατά ποσότητα μεγαλύτερη από το όριο της τεθείσας ακρίβειας. Εν προκειμένω – εφόσον δεν δίνεται ρητώς - η επιζητούμενη ακρίβεια μπορεί να εκτιμηθεί ως εξής:

Η ακρίβεια με την οποία δίνονται οι συντεταγμένες των φωτοσταθερών είναι 5cm. Συνεπώς δεν είναι δυνατό να επιζητήσει κανείς ακρίβεια υπολογισμού των γραμμικών αγνώστων μεγαλύτερη από αυτήν. Είναι μάλιστα λογικό να θεωρείται ρεαλιστική ακρίβεια μιας τάξης μεγέθους χειρότερη από αυτήν των φωτοσταθερών, δεδομένου ότι στη διαδικασία υπεισέρχονται μετρήσεις και υπολογισμοί, οι οποίοι είναι αναπόφευκτο ότι θα εισαγάγουν κάποιες αβεβαιότητες. Έτσι η επιζητούμενη ακρίβεια στον υπολογισμό των γραμμικών

στοιχείων του εξωτερικού προσανατολισμού εκτιμάται σε 0.10m. Για την εκτίμηση της αντίστοιχης με αυτήν ακρίβειας των γωνιακών μεγεθών, υπολογίζεται με τι αβεβαιότητα αντιστοιχούν τα 0.10m για το συγκεκριμένο ύψος πτήσης (740m) από την απλή σχέση:

$$\delta\alpha = \arctan(0.10/740) \times \rho'' = 86''.$$

Έτσι τα αποτελέσματα της πρώτης επίλυσης του συστήματος των κανονικών εξισώσεων ελέγχονται εάν πληρούν τα παραπάνω κριτήρια με βάση το μέγεθος των τιμών του πίνακα δx^1 . Από την πρώτη επίλυση προκύπτουν μεγάλες διορθώσεις στις προσεγγιστικές τιμές και γι' αυτό το λόγο γίνεται και δεύτερη συνόρθωση.

Εφόσον απαιτείται και άλλη διαδοχική προσέγγιση της λύσης, υπολογίζονται οι νέες διορθωμένες αρχικές τιμές ($X^1 = X^0 + \delta x^1$ ή γενικά $X^i = X^{i-1} + \delta x^i$) και επαναλαμβάνεται η κατάστρωση των εξισώσεων παρατήρησης, η διαμόρφωση του συστήματος των κανονικών εξισώσεων και η εκ νέου επίλυσή του.

$$\delta x^2 = \begin{bmatrix} 13.162\text{m} \\ -1.250\text{m} \\ -2.770\text{m} \\ 2547.25'' \\ 5092.42'' \\ -1375.31'' \end{bmatrix} \rightarrow X^2 = \begin{bmatrix} X_0^2 \\ Y_0^2 \\ Z_0^2 \\ \omega^2 \\ \varphi^2 \\ \kappa^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6528.19\text{m} \\ 11960.43\text{m} \\ 995.070\text{m} \\ 2.3615^g \\ 4.7755^g \\ 1.4638^g \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_{0_2} = 0.0058\text{mm}$$

Κατόπιν επαναλαμβάνεται ο έλεγχος και όλη η διαδικασία, έως ότου οι υπολογιζόμενες τιμές να πάψουν να συμβάλλουν στην ουσιαστική μεταβολή των αρχικών τιμών. Αυτό επιτυγχάνεται με την τρίτη συνόρθωση.

$$\delta x^3 = \begin{bmatrix} -0.09\text{m} \\ -0.06\text{m} \\ -0.08\text{m} \\ -39.97'' \\ -45.61'' \\ -23.81'' \end{bmatrix} \rightarrow X^3 = \begin{bmatrix} X_0^3 \\ Y_0^3 \\ Z_0^3 \\ \omega^3 \\ \varphi^3 \\ \kappa^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6528.10\text{m} \\ 11960.48\text{m} \\ 994.99\text{m} \\ 2.3575^g \\ 4.7709^g \\ 1.4615^g \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_{0_3} = 0.0008\text{mm}$$

Παρατηρούμε όμως πως το δεύτερο κριτήριο, σχετικά με το a posteriori τυπικό σφάλμα της μονάδας βάρους, δεν ικανοποιείται αφού $\hat{\sigma}_{0_2} \neq \hat{\sigma}_{0_3}$. Έτσι παραγματοποιείται και τέταρτη συνόρθωση που τα αποτελέσματα της οποίας είναι:

$$A^4 = \begin{bmatrix} -0,173573651 & -0,007848558 & 0,099853948 & 6,30003E-05 & 0,000295865 & 0,000125902 \\ -0,002980849 & -0,176935342 & -0,101699099 & -0,000294605 & -6,74994E-05 & 0,000114992 \\ -0,213537793 & -0,002036893 & -0,073662751 & -5,90524E-05 & 0,000282098 & 0,000148356 \\ -0,004881767 & -0,202527969 & -0,136223069 & -0,000339429 & 5,62426E-05 & -0,000103011 \\ -0,182292062 & -0,004823328 & 0,016672773 & -3,90969E-06 & 0,000239309 & 1,70603E-05 \\ 0,003213621 & -0,182422165 & -0,020098961 & -0,000240709 & -5,81372E-06 & 4,10935E-06 \\ -0,178310274 & -0,00790954 & 0,098789911 & -9,57572E-05 & 0,000288096 & -0,000167052 \\ 0,013923791 & -0,189847144 & 0,121703548 & -0,000348339 & 6,86588E-05 & 0,000110083 \\ -0,20343298 & -0,003492215 & -0,030154291 & 1,86287E-05 & 0,000252186 & -0,000163162 \\ 0,014837615 & -0,20551675 & 0,128575047 & -0,000352661 & -4,47493E-05 & -5,44138E-05 \end{bmatrix}$$

$$N^4 = \begin{bmatrix} 0,1825932 & 3,44003E-05 & -0,011616536 & 7,35103E-06 & -0,000257691 & 7,23561E-06 \\ 3,44003E-05 & 0,184044382 & -0,001669917 & 0,000303726 & -9,43545E-06 & -9,43068E-06 \\ -0,011616536 & -0,001669917 & 0,086990417 & -6,14651E-06 & 3,55319E-05 & -9,98583E-07 \\ 7,35103E-06 & 0,000303726 & -6,14651E-06 & 5,22643E-07 & -2,77845E-08 & -6,99663E-09 \\ -0,000257691 & -9,43545E-06 & 3,55319E-05 & -2,77845E-08 & 3,85451E-07 & -9,67699E-09 \\ 7,23561E-06 & -9,43068E-06 & -9,98583E-07 & -6,99663E-09 & -9,67699E-09 & 1,31611E-07 \end{bmatrix}$$

$$\delta \ell^4 = \begin{bmatrix} 0,000286679 \\ 0,000982248 \\ -0,000755665 \\ -0,000149138 \\ 9,70288E-05 \\ 6,35682E-05 \\ 0,000795396 \\ -6,94992E-05 \\ -0,000318038 \\ -0,00066275 \end{bmatrix}$$

$$\delta x^4 = \begin{bmatrix} -7.03 \times 10^{-5} \text{m} \\ -3.78 \times 10^{-4} \text{m} \\ 1.62 \times 10^{-5} \text{m} \\ 0.19^{\text{cc}} \\ -0.06^{\text{cc}} \\ -5.1 \times 10^{-3 \text{cc}} \end{bmatrix} \rightarrow X^4 = \begin{bmatrix} X_0^4 \\ Y_0^4 \\ Z_0^4 \\ \omega^4 \\ \phi^4 \\ \kappa^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6528.10 \text{m} \\ 11960.49 \text{m} \\ 995.00 \text{m} \\ 2.3576^{\text{g}} \\ 4.7709^{\text{g}} \\ 1.4615^{\text{g}} \end{bmatrix} \quad \hat{\sigma}_{0_4} = 0.0008 \text{mm}$$

$$\hat{V}_{\hat{x}} = \begin{bmatrix} 8,49142\text{E-}05 & -1,16508\text{E-}06 & -1,22201\text{E-}05 & 0,00241796 & 0,058029749 & -0,000449248 \\ -1,16508\text{E-}06 & 9,83306\text{E-}05 & -1,3365\text{E-}06 & -0,057211613 & -0,002274963 & 0,003891151 \\ -1,22201\text{E-}05 & -1,3365\text{E-}06 & 1,02351\text{E-}05 & 0,000585196 & -0,009103293 & 1,5487\text{E-}05 \\ 0,00241796 & -0,057211613 & 0,000585196 & 34,6834844 & 2,607126526 & -2,192520761 \\ 0,058029749 & -0,002274963 & -0,009103293 & 2,607126526 & 41,5965523 & -0,2253251 \\ -0,000449248 & 0,003891151 & 1,5487\text{E-}05 & -2,192520761 & -0,2253251 & 5,546004463 \end{bmatrix}$$

Έτσι τα τελικά αποτελέσματα είναι:

$X_0(m)$	6528.10 ± 0.009
$Y_0(m)$	11960.49 ± 0.010
$Z_0(m)$	995.00 ± 0.003
$\omega \text{ (grad)}$	2.3576 ± 0.0006
$\varphi \text{ (grad)}$	4.7709 ± 0.0006
$\kappa \text{ (grad)}$	1.4615 ± 0.0002