

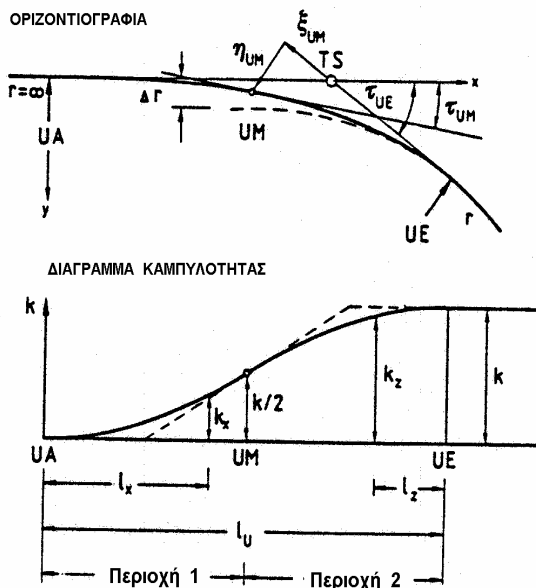
**ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ:  
 ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΣΥΓΚΟΙΝΩΝΙΑΚΩΝ ΕΡΓΩΝ - ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ**

**ΤΟΞΑ ΣΥΝΑΡΜΟΓΗΣ ΣΙΔΗΡΟΔΡΟΜΙΚΗΣ**

1. Τόξο με παραβολική συνάρτηση καμπυλότητας

*ΣΚΟΠΙΜΟΤΗΤΑ: Το τόξο με παραβολική συνάρτηση καμπυλότητας εφαρμόζεται σε ράμπες υπερύψωσης με παραβολική μορφή μεταβολής της υπερύψωσης. Επίσης μπορεί να εφαρμοσθεί στις περιπτώσεις εκείνες, στις οποίες η εκτροπή της κλωθοειδούς θεωρηθεί ιδιαίτερα μεγάλη, όπως π.χ. στις περιπτώσεις βελτίωσης μιας παλαιάς γραμμής.*

Το διάγραμμα καμπυλότητας του τόξου αυτού διαμορφώνεται από δύο συμμετρικές παραβολικές καμπύλες με αντίρροπα τα κοίλα σύμφωνα με το Σχήμα 1.



Σχήμα 1: Τόξο Συναρμογής με Παραβολική Συνάρτηση Καμπυλότητας

Ο υπολογισμός των γεωμετρικών παραμέτρων πρέπει επομένως να γίνει σε δύο στάδια σε αντιστοιχία με τις δύο διακεκριμένες περιοχές του διαγράμματος καμπυλότητας.

### ΠΕΡΙΟΧΗ 1

Η συνάρτηση καμπυλότητας στην Περιοχή 1 δίνεται από την Σχέση (1):

$$k_x = \frac{2 \cdot l_x^2}{r \cdot l_U^2} \quad (1)$$

Η σχέση μεταξύ μήκους τόξου και ακτίνας καμπυλότητας σύμφωνα με το Σχήμα 1 είναι:

$$dl_x = r_x \cdot d\tau_x \quad (2)$$

Η ολοκλήρωση της Σχέσης (2) δίνει:

$$\frac{l_x^3}{3} = \frac{r^2}{2} \cdot l_U^2 \cdot \tau_x \quad (3)$$

και

$$\tau_x = \frac{2}{3} \cdot \frac{l_x^3}{r \cdot l_U^2} \quad (4)$$

Η Σχέση (4) δίνει το γωνιακό διάγραμμα από την αρχή (UA) μέχρι το μέσο του τόξου (UM). Η συνολική μεταβολή της γωνίας διεύθυνσης από την αρχή μέχρι το μέσο του τόξου είναι επομένως:

$$\tau_{xUM} = \frac{l_U}{12 \cdot r} \quad (5)$$

Όπως και στην περίπτωση της κλωθοειδούς έτσι και στην περίπτωση αυτή η ανάπτυξη των συναρτήσεων, που δίνουν τις τοπικές συντεταγμένες του τόξου, κατά σειρά Taylor δίνει τις παρακάτω δύο σχέσεις:

$$x = l_x \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{7 \cdot 2!} + \frac{\tau_x^4}{13 \cdot 4!} - \frac{\tau_x^6}{19 \cdot 6!} + \dots\right) \quad (6)$$

και

$$y = l_x \cdot \left(\frac{\tau_x}{4} - \frac{\tau_x^3}{10 \cdot 3!} + \frac{\tau_x^5}{16 \cdot 5!} - \frac{\tau_x^7}{22 \cdot 7!} + \dots\right) \quad (7)$$

Με χρήση των τεσσάρων πρώτων όρων, που κατά κανόνα επαρκούν, οι Σχέσεις (6) και (7) γίνονται:

$$x = l_x \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{14} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{22.286} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{39.23}\right)\right)\right) \quad (8)$$

$$y = \frac{l_x \cdot \tau_x}{4} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{15} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{32} \cdot \left(1 - \frac{\tau_x^2}{57.75}\right)\right)\right) \quad (9)$$

αντίστοιχα.

## ΠΕΡΙΟΧΗ 2

Η συνάρτηση καμπυλότητας στην Περιοχή 2 του διαγράμματος -Σχήμα (1)- είναι:

$$k_z = k - \frac{2 \cdot l_z^2}{r \cdot l_U^2} \quad (10)$$

και επομένως η συνάρτηση της ακτίνας καμπυλότητας ( $r_z = 1/k_z$ ) είναι:

$$r_z = \frac{r \cdot l_U^2}{l_U^2 - 2 \cdot l_z^2} \quad (11)$$

Κατ' αναλογία με την Σχέση (2), από την διαφορική εξίσωση (12) προκύπτει μετά από ολοκλήρωση η σχέση, που δίνει το γωνιακό διάγραμμα του τόξου στην Περιοχή 2 σε αναφορά με το πέρασ του τόξου (UE) :

$$dl_z = \frac{r \cdot l_U^2}{l_U^2 - 2 \cdot l_z^2} \cdot d\tau_z \quad (12)$$

$$\tau_z = \frac{l_z}{r} - \frac{2}{3} \cdot \frac{l_z^3}{r \cdot l_U^2} \quad (13)$$

Η συνολική μεταβολή της γωνίας διεύθυνσης μεταξύ του σημείου (UE) δηλ. του πέρατος του τόξου και του σημείου (UM), δηλ. του μέσου του τόξου προκύπτει επομένως ίση με :

$$\tau_{zUM} = \frac{5}{12} \cdot \frac{l_U}{r} \quad (14)$$

Αθροίζοντας τις Σχέσεις (5) και (14) προκύπτει η συνολική μεταβολή της γωνίας διεύθυνσης μεταξύ του αρχικού σημείου (UA) και τελικού σημείου (UE) του τόξου (ίση με αυτή της κλωθοειδούς!):

$$\tau_{UE} = \frac{l_U}{(2 \cdot r)} \quad (15)$$

Για τον υπολογισμό των τοπικών συντεταγμένων του τόξου στην Περιοχή 2 πρέπει να εισαχθεί το νέο **Σύστημα ξ-η** σύμφωνα με το Σχήμα 1. Κατ' αναλογία με την Περιοχή 1 η ανάπτυξη των συναρτήσεων, που δίνουν τις συντεταγμένες ξ και η, σε σειρά Taylor δίνει τα παρακάτω αποτελέσματα:

$$\xi = l_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z}{6} \cdot \left(\frac{8}{15} \cdot \frac{l_z^3}{r \cdot l_U^2} + \tau_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z}{20} \cdot \left(\tau_z - \frac{4 \cdot l_z^3}{105 \cdot r \cdot l_U^2}\right)\right)\right)\right) \quad (16)$$

$$\eta = \frac{l_z}{2} \cdot \left(\frac{l_z^3}{3 \cdot r \cdot l_U^2} + \tau_z \cdot \left(1 - \frac{\tau_z \cdot l_z}{12 \cdot r} - \frac{l_z^6}{54 \cdot r \cdot l_U^4}\right)\right) \quad (17)$$

Αν στις Σχέσεις (16) και (17) αντικατασταθούν οι τιμές  $l_z = l_U/2$  και  $\tau_z = \tau_{zUM}$ , προκύπτουν οι συντεταγμένες ξ και η του μεσαίου σημείου UM. Επομένως είναι δυνατός ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων ξ/η στο σύστημα συντεταγμένων χ/ψ:

$$x_{UE} = x_{UM} + \xi_{UM} \cdot \cos \tau_{UE} + \eta_{UM} \cdot \sin \tau_{UE} \quad (18)$$

$$y_{UE} = y_{UM} + \xi_{UM} \cdot \sin \tau_{UE} - \eta_{UM} \cdot \cos \tau_{UE} \quad (19)$$

$$\text{με } x_{UA} = y_{UA} = 0 \quad (20)$$

Οι συντεταγμένες του κέντρου του κύκλου στο σημείο επαφής UE καθώς και το μέγεθος της εκτροπής προκύπτουν από τις ίδιες σχέσεις με αυτές της κλωθοειδούς.

## 2. Παρεμβολή Τόξου Συναρμογής με Παραβολική Συνάρτηση Καμπυλότητας μεταξύ δύο Κυκλικών Τόξων

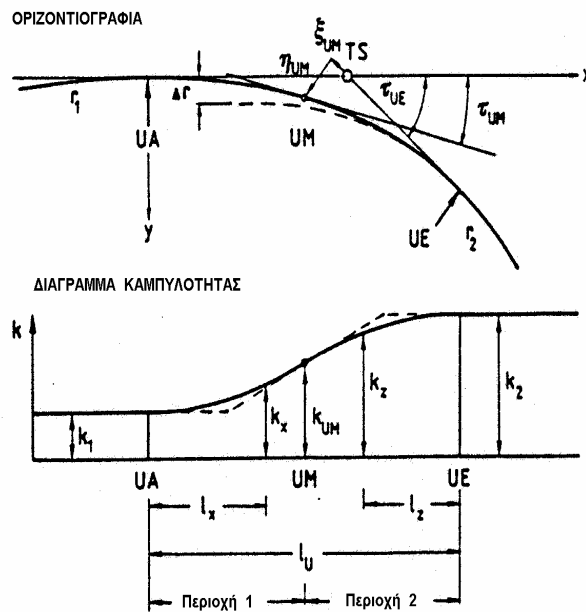
Στην περίπτωση παρεμβολής τόξου συναρμογής με παραβολική συνάρτηση μεταξύ δύο κυκλικών τόξων ισχύουν τα παρακάτω (Σχήμα 2):

**ΠΕΡΙΟΧΗ 1:** Από την αρχή του τόξου μέχρι το μέσο του τα αντίστοιχα γεωμετρικά μεγέθη έχουν τον δείκτη x. Στο αρχικό σημείο UA η ακτίνα και η καμπυλότητα είναι αντίστοιχα  $r_1$  και  $k_1$ .

**ΠΕΡΙΟΧΗ 2:** Από το μέσο του τόξου μέχρι το τελικό σημείο του (πέρας τόξου), τα αντίστοιχα γεωμετρικά μεγέθη έχουν τον δείκτη z. Στο τελικό σημείο UE η ακτίνα και η καμπυλότητα είναι αντίστοιχα  $r_2$  και  $k_2$ .

Ισχύει  $r_1 > r_2$  ( $k_1 < k_2$ ).

Στην Περιοχή 1 η συνάρτηση καμπυλότητας δίνεται από την συνάρτηση



Σχήμα 2: Τόξο συναρμογής με παραβολική συνάρτηση καμπυλότητας παρεμβαλλόμενο μεταξύ δύο κυκλικών τόξων

$$k_x = k_1 + 2 \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot l_U^2} \cdot l_x^2 \quad (21)$$

απ' όπου προκύπτει

$$r_x = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot l_U^2}{l_U^2 \cdot r_2 + 2 \cdot r_1 \cdot l_x^2 - 2 \cdot r_2 \cdot l_x^2} \quad (22)$$

Επειδή επίσης ισχύει

$$dl_x = r_x \cdot d\tau_x \quad (23)$$

προκύπτει μετά από ολοκλήρωση ότι η συνάρτηση του γωνιακού διαγράμματος είναι:

$$\tau_x = \frac{l_x}{r_1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{l_x^3}{l_U^2} \cdot \left( \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \right) \quad (24)$$

ενώ για το μεσαίο σημείο η μεταβολή της γωνίας διεύθυνσης είναι:

$$\tau_{xUM} = \frac{l_U}{12} \cdot \left( \frac{5}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (25)$$

Για τον υπολογισμό των τοπικών συντεταγμένων χ/ψ ακολουθείται η γνωστή διαδικασία ανάπτυξης των αντίστοιχων συναρτήσεων σε σειρά Taylor οπότε με χρήση των βοηθητικών παραμέτρων A και B σύμφωνα με τις Σχέσεις (26) και (27)

$$A = \frac{l_x^3}{l_U^2} \quad (26)$$

$$B = \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \quad (27)$$

προκύπτει τελικά:

$$x = l_x - \frac{l_x \cdot \tau_x}{6} \cdot \left( \tau_x - \frac{8}{15} \cdot A \cdot B - \frac{\tau_x^2}{5} \cdot \left( \frac{\tau_x}{4} - \frac{4}{21} \cdot A \cdot B \right) \right) \quad (28)$$

και

$$y = \frac{l_x}{2} \cdot \left( \tau_x - \frac{1}{2} \cdot A \cdot B - \frac{\tau_x}{12} \cdot \left( \frac{2}{9} \cdot A^2 \cdot B^2 - \tau_x \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot A \cdot B - \tau_x \cdot \left( 1 - \frac{\tau_x^2}{30} \right) \right) \right) \right) \quad (29)$$

Στην Περιοχή 2 ισχύει κατ' αναλογία

Συνάρτηση καμπυλότητας:

$$k_z = k_2 - 2 \cdot \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2 \cdot l_U^2} \cdot l_z^2 \quad (30)$$

Ακτίνα καμπυλότητας:

$$r_z = \frac{r_1 \cdot r_2 \cdot l_U^2}{l_U^2 \cdot r_1 + 2 \cdot r_2 \cdot l_z^2 - 2 \cdot r_1 \cdot l_z^2} \quad (31)$$

Συνάρτηση γωνιακού διαγράμματος:

$$\tau_z = \frac{l_z}{r_2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{l_z^3}{l_U^2} \cdot \left( \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \right) \quad (32)$$

Μεταβολή γωνίας διεύθυνσης μεταξύ τελικού σημείου UE και μεσαίου σημείου UM:

$$\tau_{zUM}^M = \frac{l_U}{2 \cdot r_2} - \frac{1}{12} \cdot l_U \cdot \left( \frac{r_1 - r_2}{r_1 \cdot r_2} \right) \quad (33)$$

Συνολική μεταβολή γωνίας διεύθυνσης μεταξύ αρχικού σημείου UA και τελικού σημείου τόξου UE:

$$\tau_{UE} = \frac{l_U}{2} \cdot \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right) \quad (34)$$

Οι τοπικές συντεταγμένες  $\xi/\eta$  σύμφωνα με το Σχήμα 2 προκύπτουν:

$$\xi = l_z - \frac{l_z \cdot \tau_z}{6} \cdot \left( \tau_z + \frac{8}{15} \cdot A \cdot B - \frac{\tau_z^2}{5} \cdot \left( \frac{\tau_z}{4} + \frac{4}{21} \cdot A \cdot B \right) \right) \quad (35)$$

και

$$\eta = \frac{l_z}{2} \cdot \left( \tau_z + \frac{1}{2} \cdot A \cdot B - \frac{\tau_z}{12} \cdot \left( \frac{2}{9} \cdot A^2 \cdot B^2 + \tau_z \cdot \left( \frac{2}{3} \cdot A \cdot B + \tau_z \cdot \left( 1 - \frac{\tau_z^2}{30} \right) \right) \right) \right) \quad (36)$$

όπου A και B οι βοηθητικές παράμετροι σύμφωνα με τις Σχέσεις (26) και (27).

### 3. Τόξο Συναρμογής κατά Bloss

**ΣΚΟΠΙΜΟΤΗΤΑ:** Το μειονέκτημα του διαχωρισμού του διαγράμματος καμπυλότητας σε δύο περιοχές και στην συνέχεια του διπλού υπολογισμού του τόξου με παραβολική συνάρτηση καμπυλότητας ήταν αφορμή για την δημιουργία του Τόξου Συναρμογής κατά Bloss. Τονίζεται ότι η χρήση των Η/Υ αίρει τον οποιοδήποτε ενδοιασμό στην χρήση του τόξου με παραβολική συνάρτηση καμπυλότητας.

Η συνάρτηση καμπυλότητας του Τόξου Συναρμογής κατά Bloss είναι:

$$k_x = \frac{3}{r \cdot l_U^2} \cdot l_x^2 - \frac{2}{r \cdot l_U^3} \cdot l_x^3 \quad (37)$$

και η ακτίνα καμπυλότητας αντίστοιχα:

$$r_x = \frac{r \cdot l_U^3}{3 \cdot l_U \cdot l_x^2 - 2 \cdot l_x^3} \quad (38)$$

Κατ' αντιστοιχία με τις προηγούμενες περιπτώσεις η συνάρτηση του γωνιακού διαγράμματος προκύπτει ίση με:

$$\tau_x = \frac{l_x^3}{r \cdot l_U^2} - \frac{l_x^4}{2 \cdot r \cdot l_U^3} \quad (39)$$

οπότε και η συνολική μεταβολή της γωνίας διεύθυνσης μεταξύ του αρχικού και τελικού σημείου του τόξου είναι:

$$\tau_{UE} = \frac{l_U}{2 \cdot r} \quad (40)$$

Οι τοπικές συντεταγμένες του τόξου δίνονται με χρήση της βοηθητικής παραμέτρου A,

$$A = \frac{l_x^4}{r_1 \cdot l_U^3} \quad (41)$$

ως εξής:

$$x = l_x \cdot \left(1 + \frac{\tau_x^4}{312} - \frac{1}{14} \cdot (\tau_x^2 + \frac{A}{8} \cdot (\tau_x + \frac{A}{18}))\right) \quad (42)$$

$$y = \frac{l_x \cdot \tau_x}{4} + \frac{l_x}{40} \cdot A - \frac{l_x}{60} \cdot \left(\tau_x^3 + \frac{3}{32} \cdot A \cdot (\tau_x^2 + \frac{A}{12} \cdot (\tau_x + \frac{A}{26}))\right) \quad (43)$$

Το Τόξο συναρμογής κατά Bloss παρουσιάζει εκτροπές, που είναι μεγαλύτερες από αυτές του τόξου με παραβολική συνάρτηση καμπυλότητας.



*ΒΑΣΙΚΟ ΠΛΕΟΝΕΚΤΗΜΑ ΤΟΥ ΤΟΞΟΥ BLOSS: Παρέχει την δυνατότητα βελτίωσης υφιστάμενων γραμμών, αντικαθιστώντας εύκολα τα υπάρχοντα συμβατικά τόξα συναρμογής όπως κυβικές παραβολές ή κλωθοειδείς (μετατοπίσεις γραμμών κατά μερικά εκατοστά του μέτρου) με ταυτόχρονη δυνατότητα αύξησης της μέγιστης επιτρεπόμενης ταχύτητας των συρμών έως και 20 km/h περίπου.*