Στοχαστικές κατανομές των κυκλοφοριακών μεγεθών

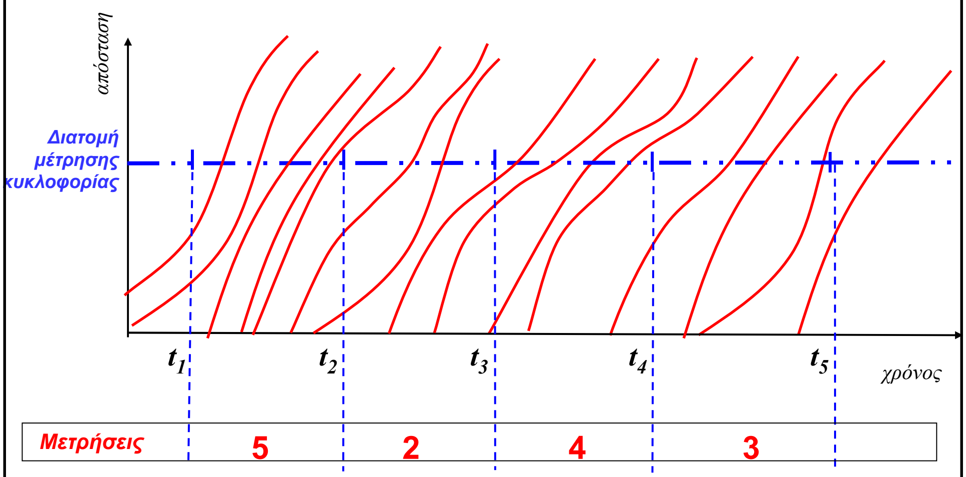
Στοχαστικές κατανομές της κυκλοφορίας

- Στοχαστικές κατανομές άφιξης οχημάτων
  - Κατανομή Poisson
  - Διωνυμική κατανομή
  - Αρνητική Διωνυμική
- Στοχαστική κατανομή χρονικού διαχωρισμού
  - Αρνητική εκθετική

Κατηγορίες και τύποι στοχαστικών κατανομών

- **Στοχαστικές κατανομές άφιξης οχημάτων**
  - Οι μετρήσεις των οχημάτων που φθάνουν (διέρχονται) από μια διατομή είναι ο πιο συνηθισμένος τρόπος μέτρησης
  - Οι μετρήσεις από μια σειρά από χρονικά διαστήματα ίσης διάρκειας, διαφέρουν γενικά μεταξύ τους, με συνέπεια να προκύπτει ότι αποτελούν μια σειρά τυχαίων γεγονότων
  - Η μελέτη αυτού του φαινομένου, δηλ. ο προσδιορισμός της πιθανότητας να αφιχθεί να αφιχθεί ένας αριθμός οχημάτων σε μια διατομή σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα, γίνεται με την χρήση 3 κατανομών :
    - Κατανομή Poisson
    - Διωνυμική κατανομή
    - Αρνητική Διωνυμική

Κατηγορίες και τύποι στοχαστικών κατανομών – Μετρήσεις κυκλοφορίας



Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Κατανομή Poisson

Κατανομή Poisson

- Όταν η κυκλοφοριακή ροή είναι αραιή, οπότε δεν παρατηρείται παρενόχληση της κίνησης του ενός οχήματος από το άλλο, η άφιξη των οχημάτων σε μια διατομή μπορεί να θεωρηθεί τυχαία
- Η κατανομή που περιγράφει γεγονότα που συμβαίνουν με εντελώς τυχαίο τρόπο είναι η κατανομή Poisson.
- Αν ο μέσος αριθμός των οχημάτων που περνούν τη διατομή σε χρονικό διάστημα (t) είναι (m), και ο μέσος φόρτος (q) [q=m/t], τότε η πιθανότητα να περάσουν την διατομή (x) οχήματα, στον χρόνο (t), δίδεται από την σχέση

$$P(x) = \frac{m^x \cdot e^{-m}}{x!} = \frac{(qt)^x \cdot e^{-q.t}}{x!}$$

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Κατανομή Poisson

- Η αθροιστική πιθανότητα του γεγονότος να εμφανισθούν λιγότερα από x, ή περισσότερα από x, οχήματα δίδονται από τις σχέσεις:

$$P(<x) = \sum_{0}^{x-1} \frac{m^i \cdot e^{-m}}{i!} \qquad P(>x) = 1 - \sum_{0}^{x} \frac{m^i \cdot e^{-m}}{i!}$$

- Η πιθανότητα να περάσουν οχήματα λιγότερα από (y) και περισσοτερα από (x)

$$P(x < i < y) = \sum_{x}^{y} \frac{m^i \cdot e^{-m}}{i!}$$

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Κατανομή Poisson

- Εξ ορισμού της κατανομής Poisson

  μέσος όρος (m) = (s^2) μεταβλητότητα

όταν ο λόγος s^2/m των παρατηρούμενων δεδομένων είναι κοντά στην μονάδα, τότε χρησιμοποιείται η κατανομή Poisson

$$\frac{s^2}{m} \approx 1 \qquad Poisson$$

$$\frac{s^2}{m} < 1 \qquad \Delta\iota\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\eta}$$

$$\frac{s^2}{m} > 1 \qquad \mathrm{A}\rho\nu\eta\tau\iota\kappa\acute{\eta}\Delta\iota\omega\nu\upsilon\mu\iota\kappa\acute{\eta}$$

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Κατανομή Poisson

Κατανομή Poisson - Παράδειγμα

Αριθμός οχημάτων / 10'' δεύτερα	Παρατηρηθείσα Συχνότητα	Σύνολο οχημάτων	Θεωρητική % Συχνότητα	Θεωρητική Συχνότητα
x	F_x	Q_x	FF	FF_x
0	94	0	54%	97,2
1	63	63	33%	59,9
2	21	42	10%	18,5
3	2	6	2%	3,8
>3	0	0	0,37%	0,7
ΣΥΝΟΛΟ	**180**	**111**		180,0

$$P(x) = \frac{m^x . e^{-m}}{x!} \qquad m = \frac{111}{180} = 0{,}616 \ o\chi./10'' \qquad FF = P(x)$$

$$FF_x = FF.\sum_x F_x \qquad s^2 = \frac{\sum_x F_x.(x-m)^2}{(\sum_x F_x) - 1} = 0{,}539$$

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Διωνυμική Κατανομή

Διωνυνική Κατανομή

- Όταν η κυκλοφοριακή ροή είναι πυκνή , η ευκαιρία για ελεύθερη κίνηση των οχημάτων μειώνεται σημαντικά και παρατηρείται μια ομοιογένεια στις ταχύτητες αλλά και στις αποστάσεις μεταξύ των οχημάτων

  $\Rightarrow$ η μεταβλητότητα των αφίξεων μειώνεται και κατά συνέπεια $s^2/m < 1$

- Η διωνυμική κατανομή δίδεται από την σχέση :

$$P(x) = C_x^n . p^x .(1 - p)^{(n-x)}$$

p είναι η πιθανότητα άφιξης ενός οχήματος, και C είναι οι συνδυασμοί n αντικείμενων x κάθε φορά. ($C_x^n = \dfrac{n!}{x!.(n-x)!}$)

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Διωνυμική Κατανομή

- Ο μέσος όρος της διωνυμικής κατανομής είναι

$$m = n.p$$

- Η μεταβλητότητα της διωνυμικής κατανομής είναι

$$s^2 = n.p.(1 - p)$$

- Οι τιμές των παραμέτρων p και n υπολογίζονται για ένα δείγμα, με τις σχέσεις:

$$\hat{p} = \frac{m - s^2}{m} \qquad \kappa\alpha\iota \qquad \hat{n} = \frac{m}{p} = \frac{m^2}{m - s^2}$$

Έχει αποδειχθεί ότι όταν ο παράγοντας n *είναι πολύ μεγάλος, ενώ η πιθανότητα* p *είναι μικρή (αραιότερη ροή), τότε η κατανομή δίνει τα ίδια αποτελέσματα με την Poisson.*

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Διωνυμική Κατανομή

Αριθμός οχημάτων / χρονικό διάστημα	Παρατηρηθείσα Συχνότητα	Σύνολο οχημάτων	$(x-m)^2$	$Fx \cdot (x-m)^2$	C_x^n	ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ Θεωρητική % Συχνότητα	ΔΙΩΝΥΜΙΚΗ Θεωρητική Συχνότητα	POISSON Θεωρητική % Συχνότητα	POISSON Θεωρητική Συχνότητα
x	F_x	Q_x							
<3	0	0	55,8	0,00			0,3		1,3
3	3	9	20,0	59,91	560,00	2%	1,0	4%	2,5
4	0	0	12,0	0,00	1820,00	4%	2,9	7%	4,7
5	8	40	6,1	48,76	4368,00	9%	6,0	11%	7,1
………	……..	…	……..	…….	……	……	……	……	…….
9	11	99	2,3	25,79	11440,00	14%	8,9	11%	7,3
10	9	90	6,4	57,67	8008,00	8%	5,4	8%	5,4
11	1	11	12,5	12,47	4368,00	4%	2,6	6%	3,7
………	……..	…	……..	…….	……	……	……	……	…….
ΣΥΝΟΛΟ	**64**	**478**		**251,94**			61,1		64,0

$$m = \frac{478}{64} = 7{,}469 \;\; \text{οχ./χρον.διαστ.} \qquad s^2 = \frac{\sum_x F_x \cdot (x-m)^2}{(\sum_x F_x) - 1} = 0{,}539$$

$$\hat{p} = \frac{m - s^2}{m} \qquad \hat{n} = \frac{m^2}{m - s^2}$$

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

Αρνητική Διωνυνική Κατανομή

- Όταν παρατηρούνται εναλλαγές στον φόρτο μεταξύ περιόδων πυκνής κυκλοφορίας, τότε η μεταβλητότητα των αφίξεων αυξάνεται σημαντικά. Το φαινόμενο ατό συμβαίνει συνήθως σε μικρή απόσταση από ένα σηματοδότη – κατά την διάρκεια του πρασίνου υπάρχει ροή ενώ κατά την διάρκεια του κόκκινου δεν υπάρχει ή είναι πολύ περιορισμένη
- Επισημαίνεται: όταν η χρονική περίοδος μέτρησης είναι μεγάλη (π.χ. ίση με την διάρκεια του συνολικού κύκλου της σηματορύθμισης) τότε το φαινόμενο αυτής της εναλλαγής του φόρτου δεν αποκαλύπτεται από τα δεδομένα. Αντίθετα όταν τα διαστήματα μέτρησης είναι μικρά τότε οι διαφορές του φόρτου καταδεικνύουν το συγκεκριμένο φαινόμενο.

  Στην πρώτη περίπτωση η Poisson θα προσαρμόζεται καλλίτερα στα δεδομένα, ενώ στην δεύτερη η αρνητική διωνυμική κατανομή

Στοχαστικές κατανομές Άφιξης: Αρνητική Διωνυμική Κατανομή

- Η Αρνητική Διωνυμική Κατανομή (που ονομάζεται και κατανομή Pascal) περιγράφεται από τις σχέσεις:

$$P(x) = C_{k-1}^{x+k-1} . p^{k} . q^{x}$$

όπου οι τιμές των παραμέτρων p, k και q υπολογίζονται για ένα δείγμα, με τις σχέσεις:

$$\hat{p} = \frac{m}{s^2} \qquad \hat{k} = \frac{m^2}{s^2 - m} \qquad \text{και} \qquad \hat{q} = (1 - \hat{p})$$

και ο μέσος όρος m και η μεταβλητότητα s^2 υπολογίζονται με τις σχέσεις:

$$m = \frac{k.(1-p)}{p} \qquad \text{και} \qquad s^2 = \frac{k.(1\text{-}p)}{p}$$

Στοχαστικές κατανομές Χρονικού διαχωρισμού: Αρνητική Εκθετική Κατανομή

- Η βασική κατανομή που περιγράφει το φαινόμενο του χρονικού διαχωρισμού μεταξύ των οχημάτων είναι η αρνητική εκθετική κατανομή

$$P(x) = \frac{m^x . e^{-m}}{x!} = \frac{(q.t)^x . e^{-q.t}}{x!}$$

m : ο μέσος αριθμός των οχημάτων που διέρχονται στο χρονικό διάστημα t

q : ο μέσος φόρτος των οχημάτων

Εάν V είναι ο ωριαίος φόρτος $\Rightarrow$

$$P(x) = \left(\frac{V.t}{3600}\right)^x \frac{e^{-V.t/3600}}{x!} \Rightarrow$$

η πιθανότητα να μην εμφανισθεί όχημα μέσα στο χρονικό διάστημα t

$$P(0) = e^{-V.t/3600}$$

$P(0)$ είναι επίσης η πιθανότητα ο χρονικός διαχωρισμός να είναι μεγαλύτερος από t δευτερόλεπτα $\Rightarrow$

$$P(h \geq t) = P(0) = e^{-V.t/3600} = e^{-q.t}$$

Στοχαστικές κατανομές Χρονικού διαχωρισμού: Αρνητική Εκθετική Κατανομή

- Εάν T είναι ο μέσος χρονικός διαχωρισμός, ισχύει η σχέση:

  q = 1 / T

  επομένως η πιθανότητα ο χρονικός διαχωρισμός να είναι μεγαλύτερος από μια τιμή ***t*** μπορεί να εκφρασθεί σαν συνάρτηση του μέσου χρονικού διαχωρισμού ***T***

$$P(h \geq t) = e^{-q.t} = e^{-t/T}$$

  και η πιθανότητα ο χρονικός διαχωρισμός να είναι μικρότερος από μια τιμή ***t*** δίνεται από την σχέση

$$P(h < t) = 1 - e^{-t/T}$$

  Οι παραπάνω σχέσεις, όπως άλλωστε και η Poisson χρησιμοποιούνται στις περιπτώσεις αραιής κυκλοφορίας

Στοχαστικές κατανομές Χρονικού διαχωρισμού: Αρνητική Εκθετική Κατανομή

- Όταν η ροή είναι πυκνή τα οχήματα συνήθως κινούνται σε φάλαγγες
- Οι οδηγοί αφήνουν περιθώρια ασφαλείας από το προπορευόμενο όχημα, τα οποία είναι μεγαλύτερα όσο μεγαλύτερη είναι η ταχύτητα
- Σε αυτές τις περιπτώσεις η αρνητική εκθετική παρουσιάζει σοβαρές αποκλίσεις από την πραγματικότητα
- Για την αντιμετώπιση του προβλήματος έχουν προταθεί διάφορες άλλες κατανομές, εκ των οποίων η απλούστερη είναι η μετατοπισμένη αρνητικά εκθετική κατανομή. Δηλ., μετατοπίζεται συνολικά η κατανομή κατά μια διάρκεια τ, ώστε να εξασφαλίζεται ο ελάχιστος χρονικός διαχωρισμός

$$P(h > t) = e^{-(t-\tau)/(T-\tau)}$$

$$P(h < t) = 1 - e^{-(t-\tau)/(T-\tau)}$$