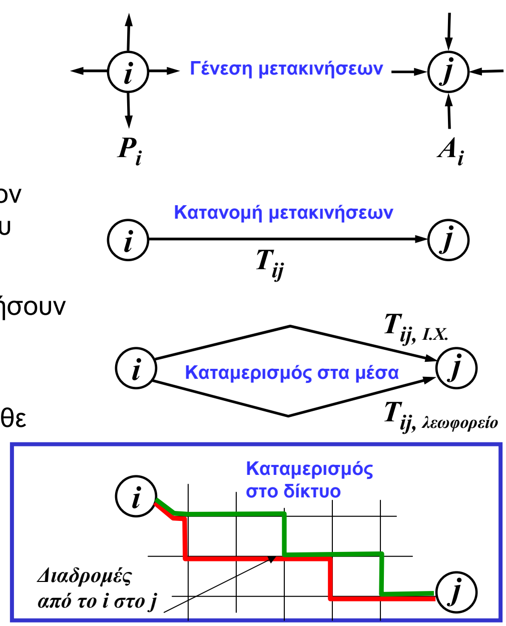
7 καταμερισμός στο δίκτυο

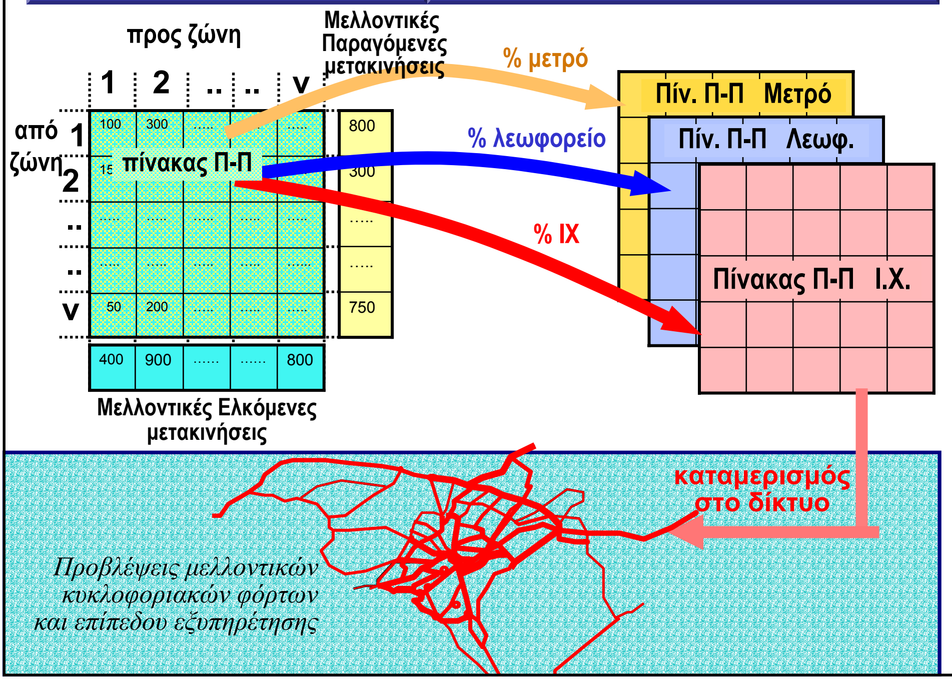
Καταμερισμός στα δίκτυο



Η διαδικασία με την οποία, από τον πινάκα Π-Π των μετακινήσεων που γίνονται με ΙΧ εκτιμώνται:

- Οι διαδρομές που θα ακολουθήσουν οι μετακινούμενοι μεταξύ κάθε ζεύγους Π-Π
- Οι κυκλοφοριακοί φόρτοι σε κάθε δρόμο του οδικού δικτύου
- Οι χρόνοι διαδρομής σε κάθε δρόμο του οδικού δικτύου

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : εισαγωγή



ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

Καταμερισμός στο δίκτυο - ορισμός του προβλήματος

με δεδομένα :

1. Αναπαράσταση του οδικού δικτύου με ένα χάρτη κόμβων - συνδέσμων
2. Συναρτήσεις χρόνου διαδρομής για κάθε σύνδεσμο του δικτύου
3. Πίνακα Προέλευσης – Προορισμού

να υπολογισθούν :

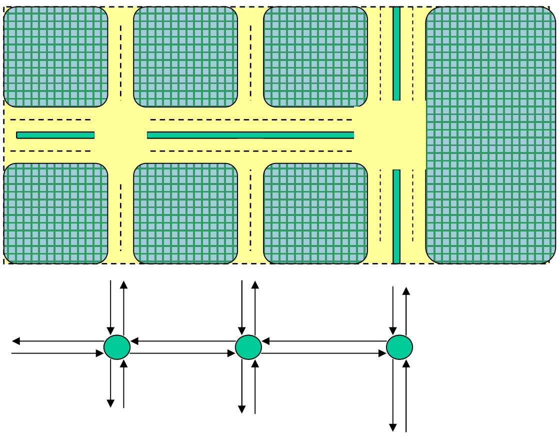
1. Οι κυκλοφοριακοί φόρτοι και
2. οι χρόνοι διαδρομής

σε κάθε δρόμο του δικτύου

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

1. Αναπαράσταση του δικτύου με χάρτη κόμβων συνδέσμων

Το πρώτο στάδιο της διαδικασίας του καταμερισμού στο δίκτυο, περιλαμβάνει την δημιουργία ενός «χάρτη κόμβων - συνδέσμων» που περιγράφει το δίκτυο.



Ο κόμβος αντιστοιχεί σε μια πραγματική ή ιδεατή διασταύρωση

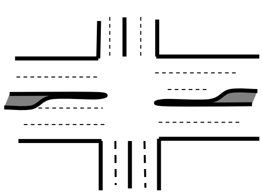
Ο σύνδεσμος αντιστοιχεί σε ένα οδικό τμήμα μεταξύ δύο κόμβων που εξυπηρετεί μια φορά κίνησης οχημάτων. Έτσι ένα αμφίδρομο οδικό τμήμα αναπαριστάται από δύο συνδέσμους με αντίθετες κατευθύνσεις.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

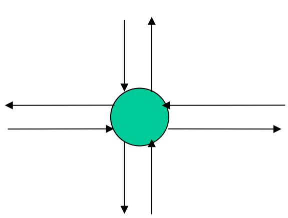
Κωδικοποίηση Διασταυρώσεων

Η κωδικοποίηση μιας διασταύρωσης εξαρτάται από :

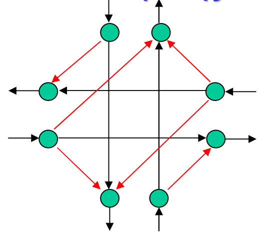
- Το επίπεδο λεπτομέρειας της ανάλυσης
- Την διαθεσιμότητα στοιχείων που έχουμε για να αναπτύξουμε, βαθμονομήσουμε και εφαρμόσουμε ένα μοντέλο.



απλή αναπαράσταση διασταύρωσης



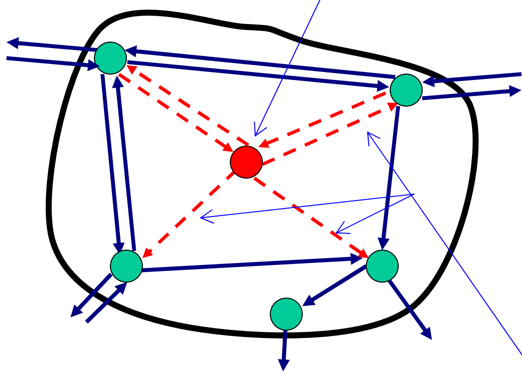
Λεπτομερής αναπαράσταση διασταύρωσης



Στην λεπτομερή αναπαράσταση :

- Γίνεται μια σαφής αναπαράσταση όλων των κατευθύνσεων που εξυπηρετούνται από την διασταύρωση.
- Στρέφουσες κινήσεις αναπαρίστανται με «εσωτερικούς συνδέσμους» που χαρακτηρίζονται από την ικανότητα εξυπηρέτησης φόρτου και τις καθυστερήσεις που προκαλούν

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος



Κεντροειδές

Το ιδεατό σημείο προέλευσης ή προορισμού των μετακινήσεων που παράγονται ή έλκονται από μια ζώνη

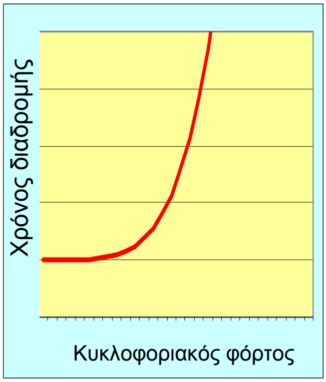
Τα κεντροειδή συνδέονται με του υπόλοιπο δίκτυο μέσω ενός ή περισσότερων ιδεατών συνδέσμων που ονομάζονται **σύνδεσμοι κεντροειδών**

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

- **Διαδρομή μεταξύ δύο κόμβων:** είναι μια διαδοχική σειρά συνδέσμων η οποία συνδέει τους δύο κόμβους.
- **Δένδρο διαδρομών :** αναφέρεται σε ένα κεντροειδές προέλευσης και δίνει όλες τις διαδρομές που το συνδέουν με τα υπόλοιπα κεντροειδή βάσει ενός κριτηρίου που έχει επιλεγεί. Για παράδειγμα αν το κριτήριο είναι ο συντομότερος χρόνος διαδρομής, το δένδρο αποτελείται από όλες τις συντομότερες διαδρομές που συνδέουν τον υπό ανάλυση κόμβο με του υπόλοιπους κόμβους του δικτύου.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

2. Συναρτήσεις χρόνου διαδρομής – φόρτου

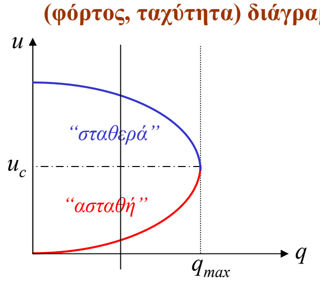


Ο χρόνος διαδρομής είναι αύξουσα συνάρτηση του κυκλοφοριακού φόρτου – δυο τυπικά παραδείγματα

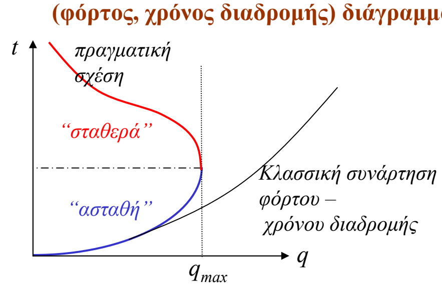
ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

Διαγράμματα που προκύπτουν από τις θεμελιώδεις σχέσεις της κυκλοφοριακής ροής

(φόρτος, ταχύτητα) διάγραμμα



(φόρτος, χρόνος διαδρομής) διάγραμμα



ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

Συναρτήσεις φόρτου – χρόνου διαδρομής

Μια από τις πλέον συνήθεις συναρτήσεις χρόνου διαδρομής – φόρτου είναι η συνάρτηση που του Bureau of Public Roads – Federal Highway Administration (ΗΠΑ)

$$t(x) = t_0\left[1+\alpha\left(\frac{x}{c}\right)^{\beta}\right]$$

όπου

- $t(x)$ = χρόνος διαδρομής όταν ο φόρτος είναι x
- t_0 = χρόνος υπό συνθήκες ελεύθερης ροής
- x = φόρτος (οχ/ώρα)
- c = χωρητικότητα (οχ/ώρα)
- α, β = παράμετροι (από βαθμονόμηση)

Συνήθεις τιμές για τις παραμέτρους είναι α=0,15 και β=4,

c είναι η πρακτική χωρητικότητα = ¾ x φόρτο κορεσμού

t_0 ο χρόνος σε συνθήκες πρακτικής χωρητικότητας x 0,87

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

3. Πίνακας Προέλευσης – Προορισμού

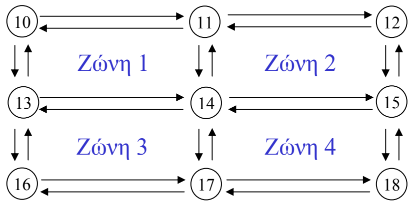
		ΖΩΝΗ ΠΡΟΟΡΙΣΜΟΥ (προς ζώνη)						
		1	2	3	4	5	.....	N
ΖΩΝΗ (από ζώνη)	1	1000	1450				....	
	2	2500	2000				....	
	3	7000	1000				....	
	4	4000	3000				....	
	5	3000	6000				....	
	....						......	
	N						....	

Ο πίνακας Π-Π είναι συνήθως ο πίνακας της ώρας αιχμής για κυκλοφοριακά συμφορημένες αστικές περιοχές, και ίσως άλλοι πίνακες για περιόδους εκτός αιχμής ή άλλες περιόδους αιχμής (π.χ. επιστροφή μετακινούμενων από περιοχές αναψυχής το απόγευμα της Κυριακής).

24ωροι πίνακες χρησιμοποιούνται για τον καταμερισμό της κυκλοφορίας σε μη κυκλοφοριακά συμφορημένα δίκτυα. Η μετατροπή του 24ωρου πίνακα σε ωριαίους πίνακες είναι σπάνια ικανοποιητική δεδομένου ότι οι 24ωροι πίνακες είναι συνήθως συμμετρικοί ενώ οι ωριαίοι σπανίως είναι.

Οι πίνακες που έχουν υπολογισθεί σε προηγούμενα στάδια (δηλ. της γένεσης και της κατανομής των μετακινήσεων) μπορεί να εκφράζουν μετακινήσεις προσώπων, οπότε χρησιμοποιώντας στοιχεία πληρότητας οχημάτων θα πρέπει να μετατραπούν σε ταξίδια οχημάτων, δεδομένου ότι οι σχέσεις φόρτου-ταχύτητας εκφράζονται σε οχήματα.

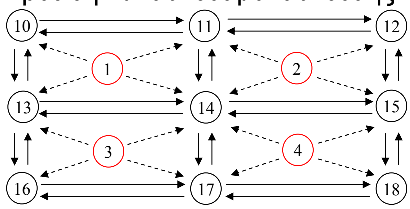
ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος



Φόρτοι από ζώνη σε ζώνη

	Zone 1	Zone 2	Zone 3	Zone 4
Zone 1	0	90	120	80
Zone 2	100	0	60	130
Zone 3	120	180	0	50
Zone 4	40	70	150	0

Κεντροειδή και σύνδεσμοι σύνδεσης



Φόρτοι από κόμβο σε κόμβο

	1	2	3	4
1	0	90	120	80
2	100	0	60	130
3	120	180	0	50
4	40	70	150	0

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

Μοντέλα καταμερισμού – κύρια χαρακτηριστικά

Τα μοντέλα καταμερισμού:

- αναλύουν οδικά δίκτυα
- κατανέμουν την ζήτηση για μετακίνηση ανάμεσα σε κάθε ζεύγος Π – Π στις εναλλακτικές διαδρομές που ενώνουν το υπόψη ζεύγος
- υπολογίζουν κυκλοφοριακούς φόρτους και χρόνους διαδρομής στους συνδέσμους του δικτύου

Ανάλογα με το πώς αναλύουν την χρονική διάσταση της ζήτησης, χωρίζονται σε δύο κατηγορίες:

Στατικά

αγνοούν την χρονική διάσταση της ζήτησης για μετακίνηση

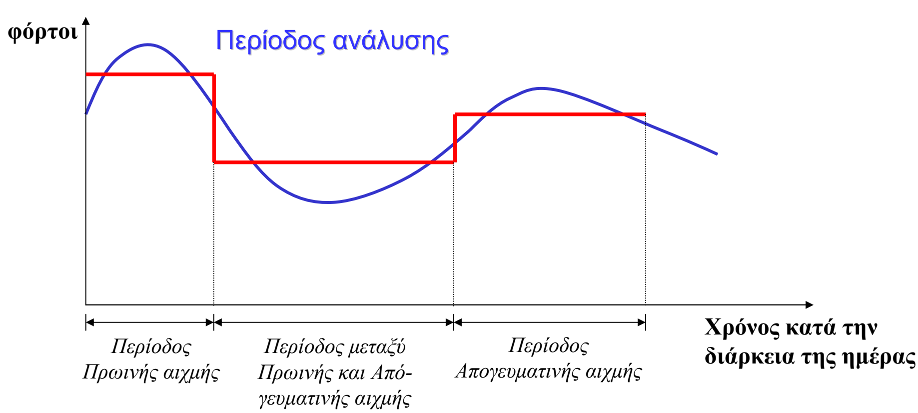
Δυναμικά

Λαμβάνουν υπόψη τη χρονική μεταβλητότητα της ζήτησης για μετακίνηση

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : ορισμός του προβλήματος

Στατικά Μοντέλα καταμερισμού στο δίκτυο

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα καταμερισμού



Στα Στατικά μοντέλα καταμερισμού

- Κατά την διάρκεια της περιόδου ανάλυσης, οι φόρτοι θεωρούνται ομοιόμορφα κατανεμημένοι για να μπορούμε να εφαρμόσουμε ανάλυση σταθερής κατάστασης
- Η διάρκεια της περιόδου ανάλυσης είναι μεγαλύτερη από την διάρκεια μιας μετακίνησης
- Τυπικές περίοδοι ανάλυσης: πρωινή αιχμή, απογευματινή αιχμή, η περίοδος μεταξύ πρωινής και απογευματινής αιχμής, το 24ωρο.

Στατικά μοντέλα καταμερισμού της κυκλοφορίας

Ντετερμινιστικά

Οι οδηγοί έχουν:

- *πλήρη γνώση των κυκλοφοριακών συνθηκών*
- *Οικονομικά ορθολογική συμπεριφορά*

Στοχαστικά

Οι οδηγοί έχουν:

- *ελλιπή γνώση των κυκλοφοριακών συνθηκών*
- *ιδιαίτερες προτιμήσεις και περιορισμούς επιλογής που οδηγούν σε μη οικονομικά ορθολογική συμπεριφορά*
- *μεταβλητότητα ως προς τον τρόπο αντίληψης των κυκλοφοριακών συνθηκών.*

Στατικά Ντετερμινιστικά μοντέλα

Η επίλυση του προβλήματος καταμερισμού

για την επίλυση του προβλήματος του καταμερισμού στο δίκτυο απαιτείται ο καθορισμός του

κανόνα επιλογής διαδρομής

που χρησιμοποιούν οι οδηγοί

Παραδοχή κανόνα: Κάθε οδηγός προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τον χρόνο (κόστος) διαδρομής του

Δεδομένης της ζήτησης για μετακίνηση μεταξύ ενός ζεύγους Π - Π,

Ερώτημα: Πως θα κατανεμηθούν οι οδηγοί στις διαδρομές που ενώνουν το συγκεκριμένο ζεύγος Π-Π?

Οι παράγοντες που επηρεάζουν την επιλογή διαδρομής είναι ό χρόνος, το κόστος (καύσιμο κ.α.), η απόσταση, η κυκλοφοριακή συμφόρηση, ο τύπος της οδού (αυτοκινητόδρομος, δευτερεύουσα κλπ), το τοπίο, η σήμανση, η ασφάλεια, η αξιοπιστία του χρόνου, η συνήθεια που έχουν οι μετακινούμενοι να χρησιμοποιούν μια διαδρομή κλπ. Στην πράξη δεν είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν όλοι αυτοί οι παράγοντες και συνήθως χρησιμοποιούνται προσεγγίσεις. Σε αστικές περιοχές ο κύριος παράγοντας που καθορίζει την επιλογή διαδρομής είναι συνήθως ο χρόνος. Ο συνδυασμός χρόνου και μήκους διαδρομής έχει επίσης αποδειχθεί ότι αποτελεί μια κατάλληλη προσέγγιση του γενικευμένου κόστους

Κατηγορίες στατικών ντετερμινιστικών μοντέλων καταμερισμού

Τα μοντέλα καταμερισμού χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το αν θεωρούν ότι ο χρόνος διαδρομής σε ένα σύνδεσμο του δικτύου είναι συνάρτηση του κυκλοφοριακού φόρτου.

Καταμερισμός

« ΌΛΑ η ΤΙΠΟΤΑ »

που θεωρεί ότι ο χρόνος διαδρομής σε ένα σύνδεσμο είναι σταθερός και ανεξάρτητος του φόρτου που χρησιμοποιεί τον σύνδεσμο.

Καταμερισμός

« ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ »

που λαμβάνει υπόψη του την κυκλοφοριακή συμφόρηση και θεωρεί ότι ο χρόνος διαδρομής σε ένα σύνδεσμο εξαρτάται από τον φόρτο που χρησιμοποιεί τον σύνδεσμο.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά ντετερμινιστικά μοντέλα

Καταμερισμός «Όλα ή τίποτα»

Παραδοχές:

1. Οι μετακινούμενοι θέλουν να χρησιμοποιήσουν **την συντομότερη διαδρομή** που συνδέει το σημείο προέλευσης τους με το σημείο προορισμού τους
2. ΑΥΞΗΣΗ ΤΟΥ ΦΟΡΤΟΥ ΔΕΝ ΣΥΝΕΠΑΓΕΤΑΙ ΚΑΘΥΣΤΕΡΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΔΙΑΔΡΟΜΗΣ

Μέθοδος

1. Προσδιορισμός των συντομότερων διαδρομών από κάθε σημείο Προέλευσης προς όλους του προορισμούς
2. Φόρτιση όλων των μετακινήσεων μεταξύ ενός σημείου προέλευσης και ενός σημείου προορισμού στους συνδέσμους που αποτελούν την συντομότερη διαδρομή
3. Για κάθε σύνδεσμο: άθροιση όλων των φόρτων που προκύπτουν από κάθε ζεύγος Π - Π

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής

το πρόβλημα της συντομότερης διαδρομής - ορισμός -

Δεδομένα :

- Οδικό δίκτυο που αναπαρίσταται με χάρτη κόμβων συνδέσμων
- Καθορισμός δύο κόμβων που αποτελούν το ζεύγος Π-Π που αναλύεται.
- Κάθε σύνδεσμος του δικτύου χαρακτηρίζεται από ένα συγκεκριμένο μήκος/ χρόνο διαδρομής / κόστος.

Στόχος:

- Να προσδιορισθεί η συντομότερη διαδρομή (δηλ. η διαδρομή με το μικρότερο συνολικό μήκος/ χρόνο διαδρομής / κόστος) από τον κόμβο προέλευσης στον κόμβο προορισμού.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής

Συντομότερη διαδρομή: ο Αλγόριθμός του Dijkstra

- Βρίσκει την συντομότερη διαδρομή από έναν κόμβο προέλευσης των μετακινήσεων προς όλους τους άλλους κόμβους.
- Παραδοχές
  - Κανένας σύνδεσμος δεν μπορεί να έχει αρνητικό κόστος (χρόνο, μήκος)
- Είναι μια επαναληπτική διαδικασία
- Για κάθε κόμβο i υπολογίζεται ένας δείκτης (l_i), που είναι το ελάχιστο κόστος (ελάχιστος χρόνος) από τον κόμβο προέλευσης μέχρι τον υπόψη κόμβο i, στην τρέχουσα επανάληψη (δηλ. η καλύτερη διαδρομή που έχει βρεθεί μέχρι αυτή την επανάληψη, που συνδέει το κόμβο προέλευσης με τον κόμβο i).
- Για κάθε κόμβο i ορίζεται ένας δείκτης p_i που είναι ο αμέσως «προηγούμενος κόμβος» επάνω στην συντομότερη διαδρομή όπως έχει καθορισθεί στην τρέχουσα επανάληψη.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής

Συντομότερη διαδρομή: ο Αλγόριθμός του Dijkstra

- Οι δείκτες/κόμβοι είναι :
  - Μόνιμοι: όταν έχουμε βρει την συντομότερη διαδρομή από τον κόμβο προέλευσης μέχρι τον υπό εξέταση κόμβο.
  - Προσωρινοί: όταν κάνουμε μια πρόβλεψη, αλλά δεν είμαστε σίγουροι
- Μια λίστα (LIST) διατηρείται και ενημερώνεται σε κάθε επανάληψη.
- Η λίστα περιέχει τους κόμβους που θα πρέπει να εξετασθούν στις επόμενες επαναλήψεις (προσωρινοί κόμβοι).

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής

Συντομότερη διαδρομή: ο Αλγόριθμός του Dijkstra

➔ Βήμα 0: Έναρξη
- Ο «υπό ανάλυση» κόμβος είναι ο κόμβος προέλευσης
- έστω l_i=0 για τον κόμβο προέλευσης,
- Έστω $l_i = \infty$ για όλους τους άλλους κόμβους
- Ο κόμβος προέλευσης μπαίνει στην λίστα : LIST={o}

➔ Βήμα 1: Τεστ βελτιστοποίησης
- Εάν η λίστα είναι άδεια ο αλγόριθμος τερματίζει. Οι δείκτες αναπαριστούν το ελάχιστο κόστος διαδρομής από τον κόμβο προέλευσης προς τους αντίστοιχους κόμβους.
- Εάν η λίστα δεν είναι άδεια, συνέχισε στο βήμα 2.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής

ο Αλγόριθμός του Dijkstra

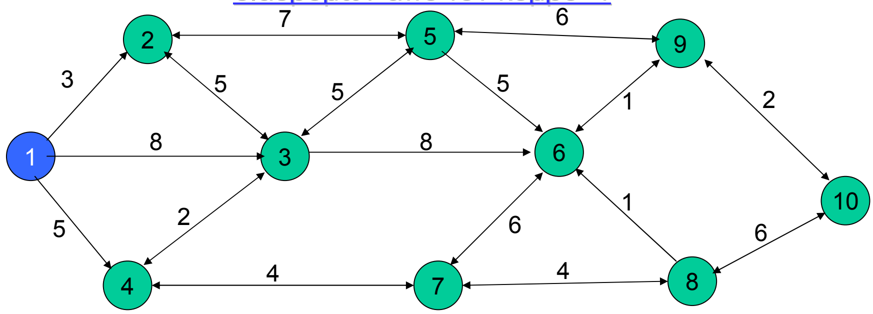
➔ Βήμα 2: Επιλογή
- Επέλεξε από την λίστα τον κόμβο με τον μικρότερο δείκτη l_i
- Κάνε αυτόν τον κόμβο μόνιμο
- Θεώρησε αυτόν τον κόμβο ως τον «υπό ανάλυση κόμβο» και διέγραψε τον από την λίστα LIST

➔ Βήμα 3: Ενημέρωση
- Έλεγξε κάθε κόμβο ο οποίος συνδέεται με ένα σύνδεσμο με τον «υπό ανάλυση κόμβο»
- Εάν ο κόμβος j συνδέεται με ένα σύνδεσμο με τον κόμβο i και $l_j > l_i + c_{ij}$ (c_{ij} είναι το κόστος/χρόνος/μήκος του συνδέσμου (i,j))
  - Ενημέρωσε τον δείκτη l_j του κόμβου j: $l_j = l_i + c_{ij}$ (δηλ. είναι συντομότερο να προσεγγίσουμε το j από τον κόμβο i)
  - Ενημέρωσε τον δείκτη p_j του κόμβου j: $p_j = i$ (δηλ. ο κόμβος που είναι προηγούμενος κόμβος του j στην συντομότερη διαδρομή είναι ο κόμβος i)
  - Βάλε τον κόμβο j στην λίστα LIST

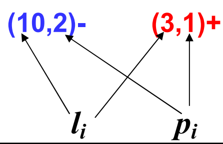
➔ Πήγαινε στο βήμα 1

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής

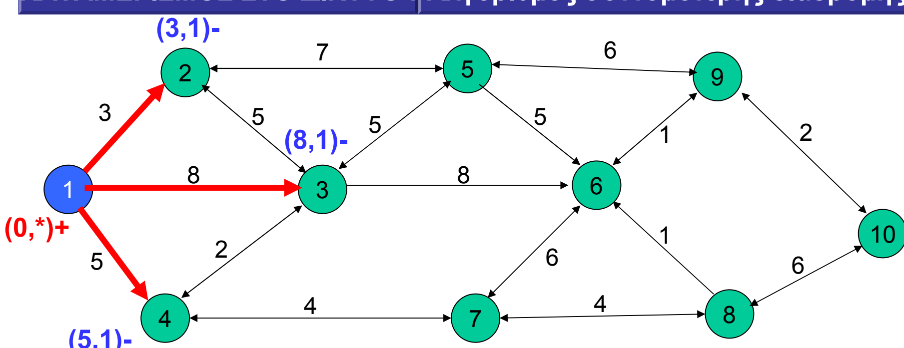
Άσκηση: να υπολογισθεί το δένδρο των συντομότερων διαδρομών από τον κόμβο 1

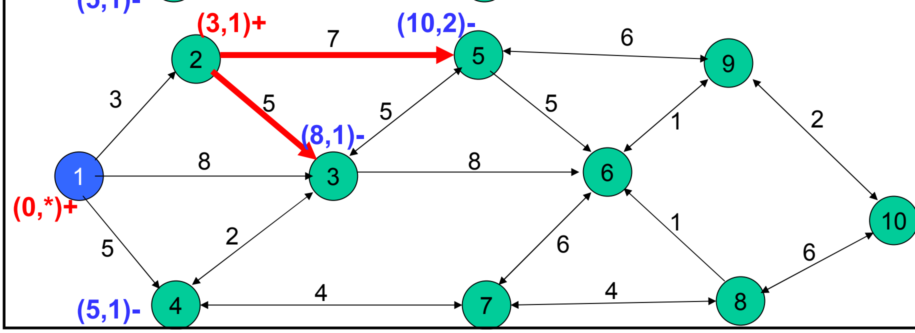


Στο παράδειγμα που ακολουθεί, οι δείκτες που υπολογίζονται σε κάθε επανάληψη του αλγόριθμου Dijkstra, αναγράφονται δίπλα στον σχετικό κόμβο. Ο πρώτος μέσα στην παρένθεση είναι η τιμή του δείκτη l_i και ο δεύτερος δείκτης συμβολίζει τον δείκτη p_i . Το σύμβολο **+** χρησιμοποιείται για να δείξει ότι ο κόμβος είναι σταθερός και το σύμβολο **–** ότι ο κόμβος είναι προσωρινός.

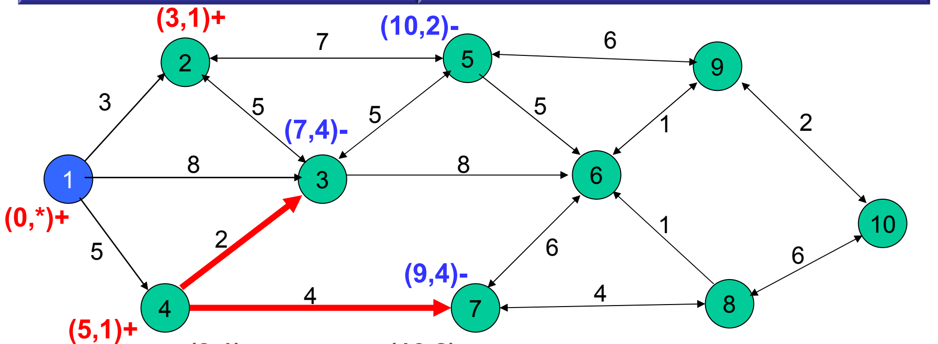


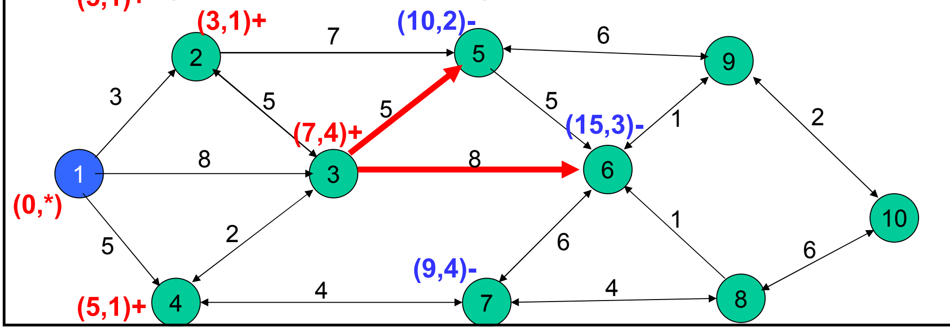
ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής



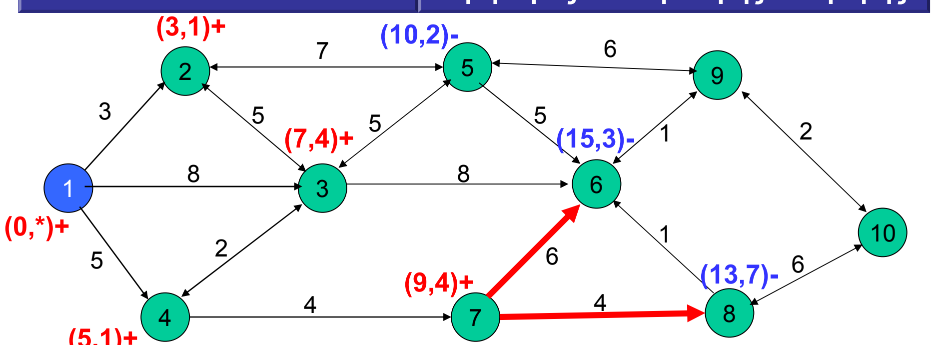


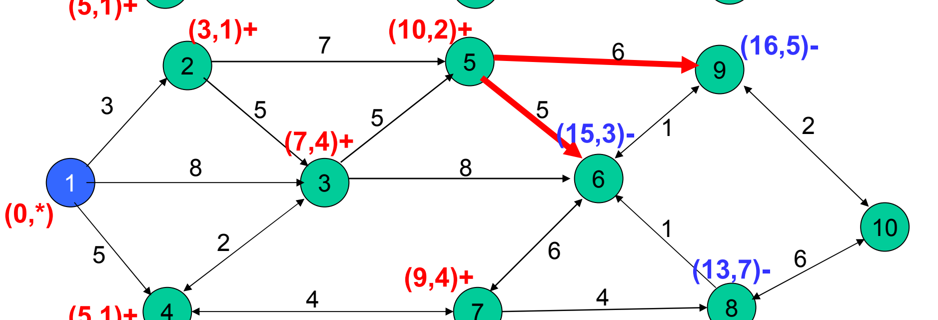
ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής



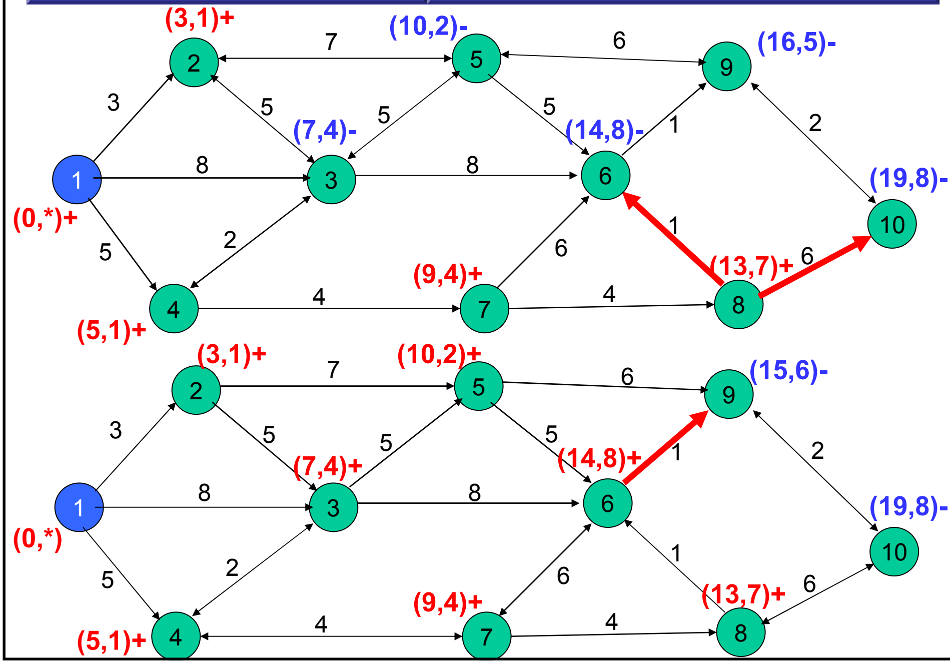


ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής

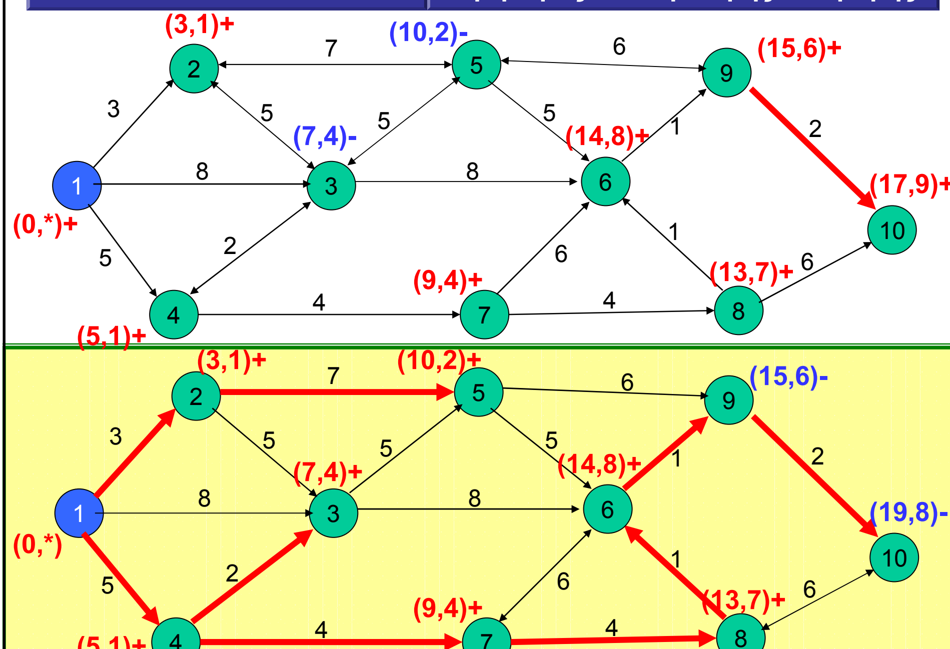




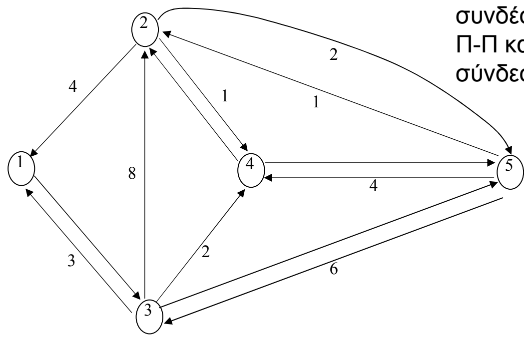
ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής



ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος συντομότερης διαδρομής



Παράδειγμα καταμερισμού «όλα ή τίποτα»



Να υπολογισθούν οι φόρτοι στους συνδέσμους του δικτύου. Δίδεται ο πίνακας Π-Π και οι χρόνοι ελεύθερης ροής σε κάθε σύνδεσμο του δικτύου.

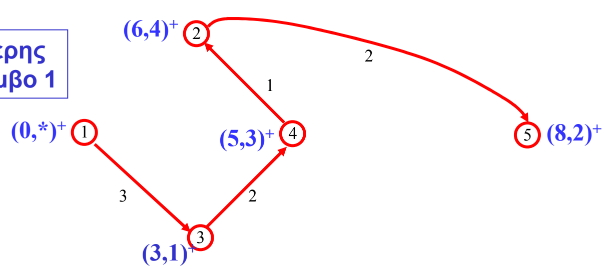
Πίνακας Π - Π

προς

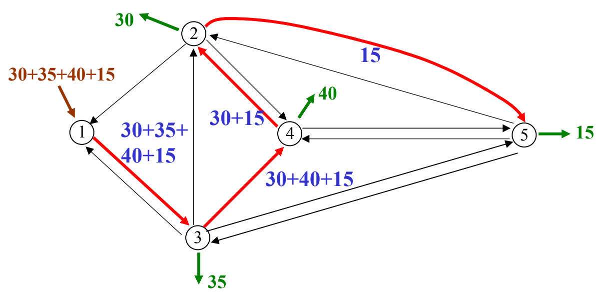
από	1	2	3	4	5
1	–	30	35	40	15
2	10	–	15	12	10
3	50	40	–	35	20
4	25	30	35	–	40
5	45	30	35	40	–

Καταμερισμός φόρτων από κόμβο 1

Δένδρο συντομότερης Διαδρομής από κόμβο 1



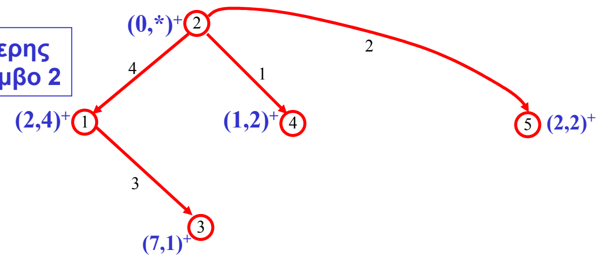
Φόρτιση του δικτύου με τις μετακινήσεις που έχουν Προέλευση τον κόμβο 1



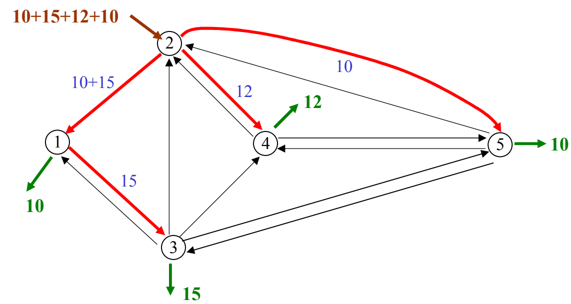
Στατικά Ντετερμινιστικά μοντέλα : Καταμερισμός Όλα ή Τίποτα

Καταμερισμός φόρτων από κόμβο 2

Δένδρο συντομότερης Διαδρομής από κόμβο 2



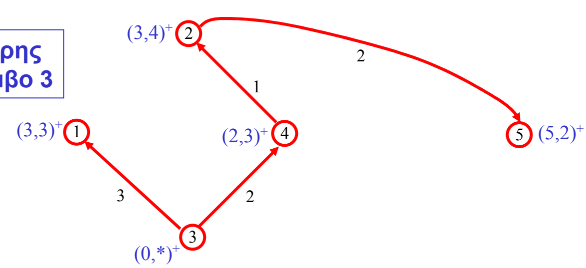
Φόρτιση του δικτύου με τις μετακινήσεις που έχουν Προέλευση τον κόμβο 2



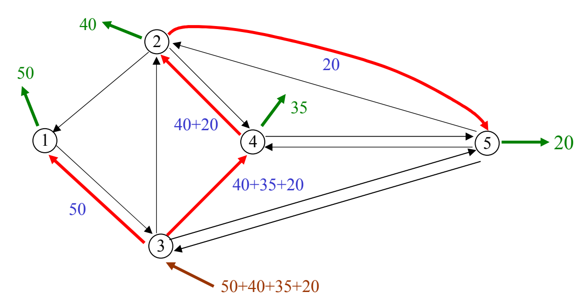
Στατικά Ντετερμινιστικά μοντέλα : Καταμερισμός Όλα ή Τίποτα

Καταμερισμός φόρτων από κόμβο 3

Δένδρο συντομότερης Διαδρομής από κόμβο 3

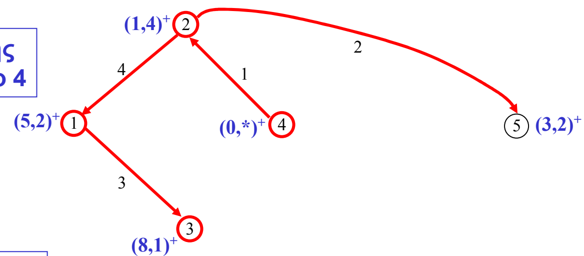


Φόρτιση του δικτύου με τις μετακινήσεις που έχουν Προέλευση τον κόμβο 3

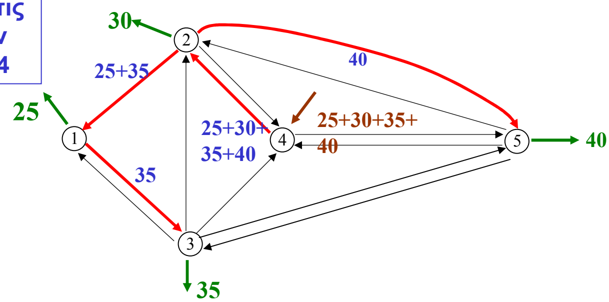


Καταμερισμός φόρτων από κόμβο 4

Δένδρο συντομότερης Διαδρομής από κόμβο 4



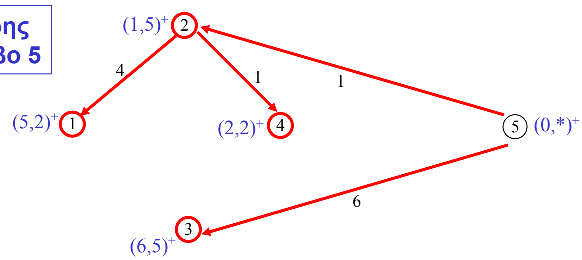
Φόρτιση του δικτύου με τις μετακινήσεις που έχουν Προέλευση τον κόμβο 4



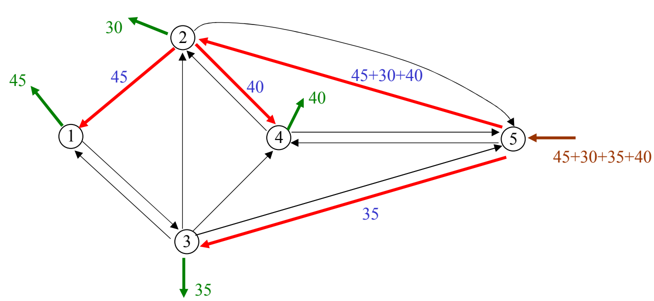
Στατικά Ντετερμινιστικά μοντέλα : Καταμερισμός Όλα ή Τίποτα

Καταμερισμός φόρτων από κόμβο 5

Δένδρο συντομότερης Διαδρομής από κόμβο 5

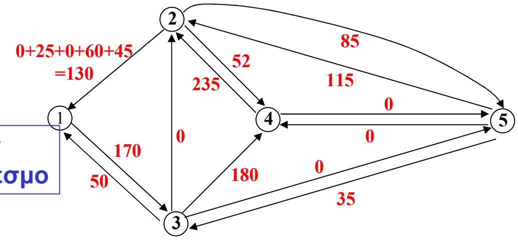


Φόρτιση του δικτύου με τις μετακινήσεις που έχουν Προέλευση τον κόμβο 5



Στατικά Ντετερμινιστικά μοντέλα : Καταμερισμός Όλα ή Τίποτα

Αποτελέσματα του καταμερισμού Όλα ή Τιποτα



Άθροιση όλων των φόρτων σε κάθε σύνδεσμο

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ

- ***Ο καταμερισμός Όλα ή Τίποτα*** δεν λαμβάνει υπόψη του την κυκλοφοριακή συμφόρηση
- Για να λάβουμε υπόψη την κυκλοφοριακή συμφόρηση θα πρέπει ο χρόνος διαδρομής να εξαρτάται από τον φόρτο
- Πως λαμβάνουμε υπόψη την κυκλοφορική συμφόρηση?

  ⇒ ***Καταμερισμός ισορροπίας***

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας

Προσομοίωση της διαδικασίας καταμερισμού των μετακινήσεων στο δίκτυο

Αν θέλουμε να προσομοιώσουμε την διαδικασία καταμερισμού της ζήτησης, είναι λογικό να υποθέσουμε ότι κατ΄ αρχάς όλοι οι μετακινούμενοι θα επιλέξουν την συντομότερη διαδρομή , αυτό όμως θα επιφέρει αύξηση της κυκλοφορίας ……

Η αρχή του Wardrop (1952)

Ο τρόπος που καταμερίζεται η κυκλοφορία σε ένα οδικό δίκτυο διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1952 από τον Wardrop, που εισήγαγε την έννοια της ισορροπίας, που αποτελεί ορόσημο στην θεωρεία προτυποποίησης των συγκοινωνιακών συστημάτων.
Σύμφωνα με την αρχή της συνθήκης ισορροπίας, η κυκλοφορία κατανέμεται σε ένα δίκτυο έτσι ώστε :

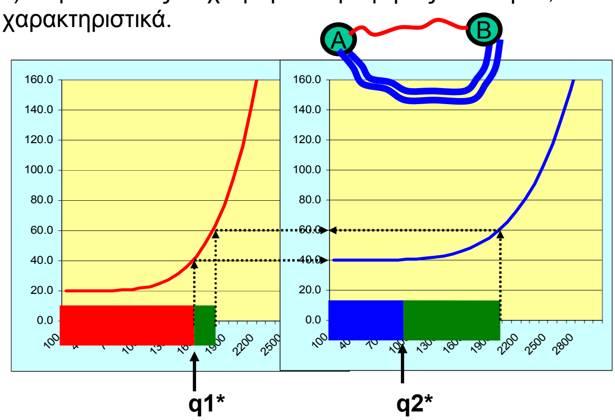
‘ **οι χρόνοι ταξιδιού σε όλες τις διαδρομές που χρησιμοποιούνται είναι ίσοι** και μικρότεροι από τον χρόνο που θα έκανε ένα όχημα εάν ταξίδευε κατά μήκος μίας διαδρομής που δεν χρησιμοποιείται ……

….. δεδομένου ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κυκλοφορία θα καταλήξει σε μια κατάσταση ισορροπίας στην οποία κανένας μετακινούμενος δεν μπορεί να ελαττώσει τον χρόνο διαδρομής του επιλέγοντας μια νέα διαδρομή ’

«συνθήκη ισορροπίας των χρηστών του δικτύου»

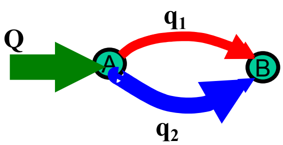
Χαρακτηριστικά οδών, εξέλιξη κυκλοφοριακών συνθηκών και επιλογή διαδρομής – ενά απλό παράδειγμα:

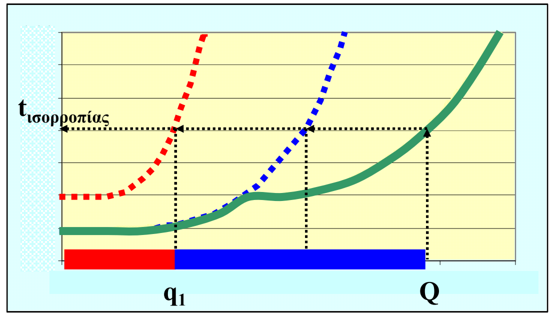
- Ας υποθέσουμε ότι δύο πόλεις Α και Β ενώνονται με δύο δυο οδούς που έχουν διαφορετικά χαρακτηριστικά. Η κόκκινη οδός 1 έχει μικρότερο μήκος αλλά πτωχά γεωμετρικά χαρακτηριστικά (έχει χαμηλότερη χωρητικότητα και εντονότερο ρυθμό αύξησης της κυκλοφοριακής συμφόρησης όπως απεικονίζεται και από την καμπύλη χρόνου διαδρομής – φόρτου). Η μπλέ οδός 2 έχει μεγαλύτερο μήκος από την 1, αλλά καλύτερα γεωμετρικά χαρακτηριστικά.
- Για χαμηλά επίπεδα φόρτου όταν επικρατούν συνθήκες ελεύθερης ροής, η οδός 1 είναι πιο ελκυστική, επομένως για χαμηλά επίπεδα φόρτου όλες οι μετακινήσεις θα γίνονται μέσω της οδού 1. Καθώς αυξάνεται όμως ο φόρτος ο χρόνος κατά μήκος της οδού 1 αυξάνεται και προσεγγίζει τον χρόνο ελεύθερης ροής στην οδό 2.



Σύνθετη συνάρτηση χρόνου διαδρομής – συνολικών μετακινήσεων του οδικού δικτύου.

Πως όμως μπορούμε να υπολογίσουμε τους φόρτους ισορροπίας σε ένα τέτοιο απλό παράδειγμα?





$\Rightarrow \quad q_2 = Q - q_1$

Απεικονίζοντας τις συναρτήσεις φόρτου – χρόνου διαδρομής στο ίδιο διάγραμμα έχουμε την δυνατότητα να κατασκευάσουμε μια σύνθετη συνάρτηση χρόνου διαδρομής – συνολικών μετακινήσεων μεταξύ Α και Β , (πράσινη γραμμή) που κατασκευάζεται αθροίζοντας οριζόντια τις δύο επιμέρους καμπύλες. Με αυτό τον τρόπο για κάθε τιμή του χρόνου διαδρομής, οι μετακινήσεις μεταξύ του Α και του Β είναι το άθροισμα των μετακινήσεων που χρησιμοποιούν τις επιμέρους διαδρομές. Έτσι όταν αυτή η καμπύλη κατασκευάζεται από τις συνολικές μετακινήσεις είναι δυνατόν να υπολογίσουμε γραφικά τον φόρτο κάθε διαδρομής

Καταμερισμός ισορροπίας - σχέσεις μεταξύ χρόνων/φόρτων στους συνδέσμους και χρόνων/φόρτων κατά μήκος διαδρομών

Διαδρομή μεταξύ δύο κόμβων είναι μια διαδοχική σειρά συνδέσμων που συνδέει τους δύο κόμβους. Ο χρόνος διαδρομής κατά μήκος μιας διαδρομής είναι επομένως το άθροισμα των χρόνων διαδρομής όλων των συνδέσμων που αποτελούν την συγκεκριμένη διαδρομή.

Ο χρόνος c_k^{rs} κατά μήκος μια διαδρομής k που συνδέει το ζεύγος Π-Π r-s, υπολογίζεται από τους χρόνους διαδρομής των συνδέσμων του δικτύου, χρησιμοποιώντας την σχέση:

$$c_k^{rs} = \sum_a t_a . \delta_{a,k}^{rs} \quad \forall\, k, r, s$$

t_a ο χρόνος διαδρομής στον σύνδεσμο α, και

$$\delta_{a,k}^{rs} = \begin{cases} 1 \text{ εάν ο σύνδεσμος α αποτελεί τμήμα της διαδρομής k} \\ 0 \text{ σε όλες τις άλλες περιπτώσεις} \end{cases}$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας

Καταμερισμός ισορροπίας - σχέσεις μεταξύ χρόνων/φόρτων στους συνδέσμους και χρόνων/φόρτων κατά μήκος διαδρομών

Αντίστοιχα, ένας σύνδεσμος μπορεί να αποτελεί τμήμα πολλών διαφορετικών διαδρομών. Ο αριθμός των οχημάτων x_a που διέρχονται από ένα συγκεκριμένο σύνδεσμο, a, είναι ίσος με το άθροισμα των οχημάτων που ακολουθούν κάθε μια από εκείνες τις διαδρομές, τμήμα των οποίων αποτελεί ο σύνδεσμος a. Επομένως χρησιμοποιώντας τον δείκτη $\delta_{a,k}^{rs}$, μπορούμε να εκφράσουμε τον φόρτο ενός συνδέσμου με την ακόλουθη σχέση:

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs} . \delta_{a,k}^{rs} \qquad \forall\ a$$

x_a ο φόρτος στην σύνδεσμο, a

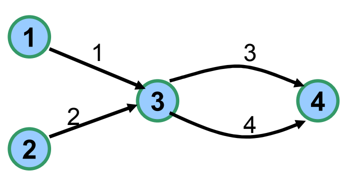
f_k^{rs} ο φόρτος της διαδρομής k, δηλ, ο αριθμός των οχημάτων που ακολουθούν την διαδρομή k που συνδέει το ζεύγος Π-Π r-s. Επομένως

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \qquad \forall\ r, s$$

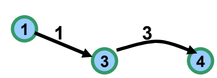
όπου q_{rs} ο αριθμός των οχημάτων που κινούνται από τη ζώνη r στη ζώνη s.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας

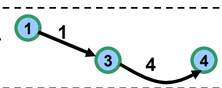
Καταμερισμός ισορροπίας - σχέσεις μεταξύ χρόνων/φόρτων στους συνδέσμους και χρόνων/φόρτων κατά μήκος διαδρομών



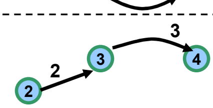
Διαδρομή 1, 1-4



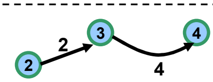
Διαδρομή 2, 1-4



Διαδρομή 1, 2-4



Διαδρομή 2, 2-4



$$\sum_k f_k^{24} = f_1^{24} + f_2^{24} = q_{24}$$

$$x_3 = \sum_r \sum_s \sum_k f_k{}^{rs} . \delta_{3,k}{}^{rs} = f_1^{14}\delta_{3,1}^{14} + f_2^{14}\delta_{3,2}^{14} + f_1^{24}\delta_{3,1}^{24} + f_2^{24}\delta_{3,2}^{24}$$

$$c_1^{14} = \sum_a t_a . \delta_{a,1}^{14} = t_1 . \delta_{1,1}^{14} + t_2 . \delta_{2,1}^{14} + t_3 . \delta_{3,1}^{14} + t_4 . \delta_{4,1}^{14}$$

Καταμερισμός ισορροπίας - σχέσεις μεταξύ χρόνων/φόρτων στους συνδέσμους και χρόνων/φόρτων κατά μήκος διαδρομών

Εάν στην κατάσταση ισορροπίας ορίσουμε ως $\mathcal{K}_{rs}$ το σύνολο των διαδρομών που χρησιμοποιούνται από τα οχήματα με ζώνη προέλευσης την r και ζώνη προορισμού την s, και $\mathcal{U}_{rs}$ το σύνολο των διαδρομών που συνδέουν την ζώνη r με την ζώνη s αλλά δεν χρησιμοποιούνται από τα οχήματα που κινούνται από την ζώνη r στην ζώνη s, τότε ισχύουν οι σχέσεις:

$$c_n^{rs} = c_m^{rs} < c_u^{rs} \quad \forall \quad n,m \in \mathcal{K}_{rs} \text{ και } u \in \mathcal{U}_{rs}$$

όπου:

$$c_k^{rs} = \sum_a t_a(x_a).\delta_{a,k}^{rs} \quad \forall\, k,r,s$$

υπό τις συνθήκες

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall\, r,s \qquad\qquad f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall\, k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs}.\delta_{a,k}^{rs} \qquad \forall\, a$$

Καταμερισμός ισορροπίας - σχέσεις μεταξύ χρόνων/φόρτων στους συνδέσμους και χρόνων/φόρτων κατά μήκος διαδρομών

Επομένως για να υπολογίσουμε τους φόρτους της κατάστασης ισορροπίας, σε σχετικά απλές μορφές δικτύων (*όπου είναι δυνατό να προσδιορίσουμε όλες τις διαδρομές που συνδέουν το κάθε ζεύγος Π-Π,*) κατ' αρχάς εκφράζουμε τους χρόνους διαδρομής σαν συνάρτηση των φόρτων των συνδέσμων :

$$c_k^{rs} = \sum_a t_a(x_a).\delta_{a,k}^{rs} \quad \forall\, k,r,s$$

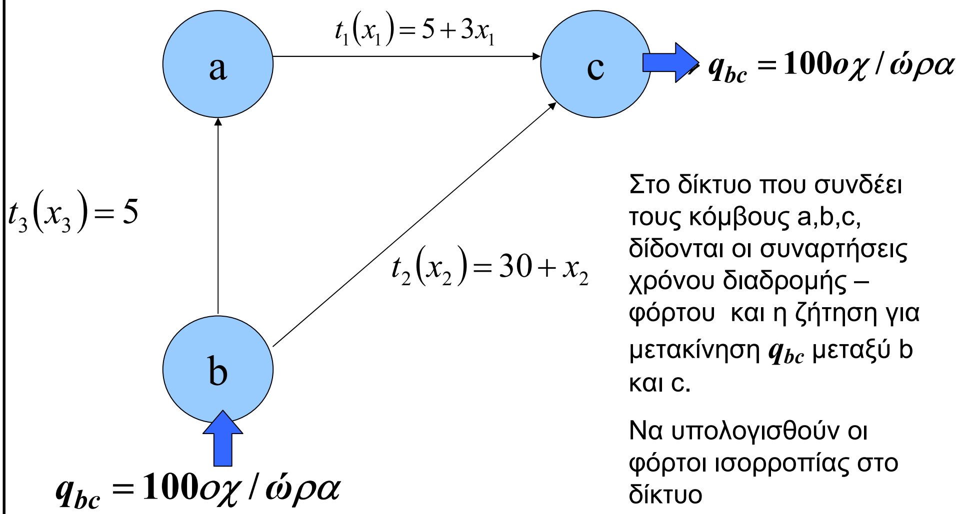
Στην συνέχεια αναπτύσσουμε ένα σύστημα εξισώσεων που εκφράζουν

a. τήν συνθήκη ισορροπίας του δικτύου, δηλ. ότι οι χρόνοι διαδρομές σε όλες τις διαδρομές που χρησιμοποιούνται είναι ίσοι, και

b. την συνθήκη διατήρησης του φόρτου στους κόμβους, δηλ. ότι το σύνολο των οχημάτων που εισέρχονται σε ένα κόμβο είναι ίσο με το σύνολο των οχημάτων που εξέρχονται από τον κόμβο.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας

Παράδειγμα: Καταμερισμός ισορροπίας



Στο δίκτυο που συνδέει τους κόμβους a,b,c, δίδονται οι συναρτήσεις χρόνου διαδρομής – φόρτου και η ζήτηση για μετακίνηση q_{bc} μεταξύ b και c.

Να υπολογισθούν οι φόρτοι ισορροπίας στο δίκτυο

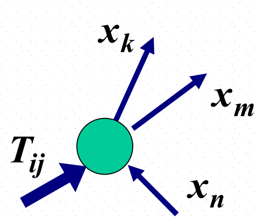
ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας

Για την επίλυση του προβλήματος θα πρέπει να λάβουμε υπόψη:

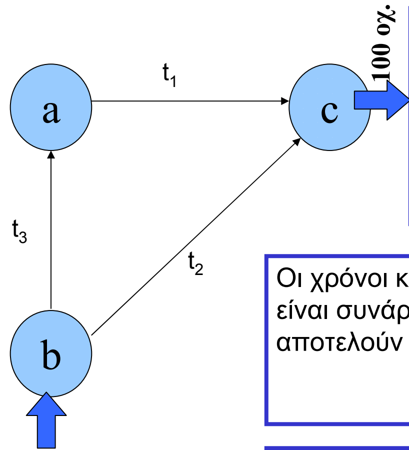
1) στην κατάσταση ισορροπίας οι χρόνοι μετακίνησης στις εναλλακτικές διαδρομές που χρησιμοποιούνται θα πρέπει να είναι ίσοι

2) σε κάθε κόμβο θα πρέπει να ισχύει η **συνθήκη διατήρησης των φόρτων**, δηλ. ο αριθμός των οχημάτων που εισέρχονται σε ένα κόμβο θα πρέπει να είναι ίσος με τον αριθμό των οχημάτων που εξέρχονται από τον κόμβο.

$$T_{ij} + x_n = x_k + x_m$$



ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας



$$q_{bc} = 100 o\chi$$

Ζεύγος Π – Π : [b , c]

Δύο διαδρομές :

(1) : σύνδεσμος 2

(2) : σύνδεσμος 3, σύνδεσμος 1

Οι χρόνοι κατά μήκος των διαδρομών που επιλέγονται, είναι συνάρτηση των χρόνων των συνδέσμων που αποτελούν την διαδρομής:

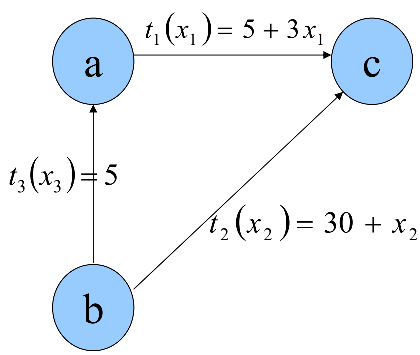
$$C_1^{bc} = t_2, \; C_2^{bc} = t_1 + t_3$$

Από συνθήκες διατήρησης του φόρτου:

$$x_1 = x_3$$

$$x_2 + x_3 = q_{bc} = 100$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας



Στην κατάσταση ισορροπίας οι χρόνοι σε όλες τις διαδρομές που χρησιμοποιούνται είναι ίσοι

$$\left.\begin{aligned} & C_1^{bc} = C_2^{bc} \\ & t_2(x_2) = t_1(x_1) + t_3(x_3) \\ & x_1 = x_3 \\ & x_2 + x_3 = q_{bc} = 100 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 30 + x_2 = 5 + 3x_1 + 5 \quad \Rightarrow \quad 30 + x_2 = 10 + 3.(100 - x_2) \Rightarrow \quad 4x_2 = 280 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = x_3 = 30 \qquad x_2 = 70$$

$$\Rightarrow \quad t_2(x_2) = t_1(x_1) + t_3(x_3) = 100$$

Για γενικές μορφές δικτύων και μη γραμμικές σχέσεις χρόνου διαδρομής – φόρτου, είναι πολύ δύσκολο να επιλυθεί το πρόβλημα. Ειδικοί αλγόριθμοι θα πρέπει να εφαρμοσθούν.

Αλγόριθμοι επίλυσης του καταμερισμού ισορροπίας

Αναλυτική επίλυση του προβλήματος του καταμερισμού ισορροπίας, λύνοντας ένα σύστημα εξισώσεων που εκφράζουν τις συνθήκες ισορροπίας και διατήρησης του φόρτου, δεν είναι εφικτή για δίκτυα με μεγάλο αριθμό κόμβων και συνδέσμων. Οι μέθοδοι επίλυσης του προβλήματος χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες:

- Προσεγγιστικές μέθοδοι, που δεν συγκλίνουν απαραίτητα στην κατάσταση ισορροπίας, και περιλαμβάνουν τους αλγόριθμους
  - καταμερισμού με περιορισμό χωρητικότητας
  - τμηματικής φόρτισης του δικτύου
- Μέθοδοι μαθηματικής επίλυσης, που συγκλίνουν προς την κατάσταση ισορροπίας εκ των οποίων αυτή που εφαρμόζεται ευρέως είναι
  - η μέθοδος του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης.

Αλγόριθμός καταμερισμού με περιορισμό χωρητικότητας (αρχική προσέγγιση)

- Βήμα 1 : Εφαρμογή καταμερισμού «όλα ή τίποτα» με βάση τους χρόνους ελεύθερης ροής. Ο καταμερισμός έχει σαν αποτέλεσμα το σύνολο των φόρτων σε όλους τους συνδέσμους του δικτύου
- Βήμα 2 : Ενημέρωση των χρόνων διαδρομής όλων των συνδέσμων με βάση τους φόρτους που υπολογίσθηκαν στο προηγούμενο στάδιο. Update travel times on links based on the flows
- Βήμα 3 : Καταμερισμός όλων των μετακινήσεων στο δίκτυο χρησιμοποιώντας τους χρόνους διαδρομής που ενημερώθηκαν στο βήμα 2. Ο καταμερισμός υπολογίζει ένα νέο σύνολο φόρτων
- Βήμα 4 : Εάν οι φόρτοι είναι παρόμοιοι με τους φόρτους της προηγούμενης επανάληψης, ο καταμερισμός έχει φθάσει στην κατάσταση ισορροπίας. Εάν όχι πήγαινε στο βήμα 2.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

Αλγόριθμός καταμερισμού με περιορισμό χωρητικότητας

- Ο αλγόριθμος που περιγράφηκε συνήθως δεν συγκλίνει σε μια κατάσταση ισορροπίας. Οι φόρτοι που υπολογίζονται σε κάθε επανάληψη μετακινούνται μεταξύ εναλλακτικών διαδρομών εμφανίζοντας μια περιοδικότητα.
- Για να ξεπεράσουμε αυτό το πρόβλημα ο αλγόριθμος τροποποιείται έτσι ώστε αντί να χρησιμοποιούμε σε κάθε επανάληψη τους χρόνους διαδρομής που υπολογίσθηκαν στην προηγούμενη επανάληψη, χρησιμοποιείται ένας σταθμισμένος μέσος όρος των χρόνων που υπολογίσθηκαν στις δύο προηγούμενες επαναλήψεις.
- Τα βάρη που χρησιμοποιούνται είναι 0,75 και 0,25 όπως περιγράφεται στον τροποποιημένο αλγόριθμο που παρουσιάζεται στην συνέχεια
- Σύγκλιση σε κατάσταση ισορροπίας δεν εγγυάται και ο αλγόριθμος τερματίζει μετά από προκαθορισμένο αριθμό επαναλήψεων.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

Αλγόριθμός καταμερισμού με περιορισμό χωρητικότητας

➔ Βήμα 0: Έναρξη

- Εφαρμογή της μεθόδου καταμερισμού «Όλα ή Τίποτα» με βάση τους χρόνους διαδρομής $t_a^0=t_a(0)$ για κάθε σύνδεσμο a. Ο καταμερισμός έχει σαν αποτέλεσμα τους φόρτους σε όλους τους συνδέσμους $\{x_a^0\}$.
- Έναρξη αρίθμησης επαναλήψεων, $n=1$

➔ Βήμα 1: Ενημέρωση :

- $\tau_a^n = t_a(x_a^{n-1})$ για κάθε σύνδεσμο a.

➔ Βήμα 2: Ομαλοποίηση :

- $t_a^n = 0{,}75.t_a^{n-1} + 0{,}25.\tau_a^n$ για κάθε σύνδεσμο a.

➔ Βήμα 3: Φόρτιση δικτύου :

- Καταμερισμός όλων των μετακινήσεων με την μέθοδο «Όλα η τίποτα» με βάση τους χρόνους διαδρομής των συνδέσμων $\{t_a^n\}$. Ο καταμερισμός έχει σαν αποτέλεσμα τους φόρτους σε όλους τους συνδέσμους $\{x_a^n\}$.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

Αλγόριθμός καταμερισμού με περιορισμό χωρητικότητας

➔ Βήμα 4: Κανόνας τερματισμού

- Εάν $n = N$ (N είναι ο μέγιστος αριθμός επαναλήψεων) πήγαινε το βήμα 5. Αλλιώς $n = n+1$ και και πήγαινε στο βήμα 1.

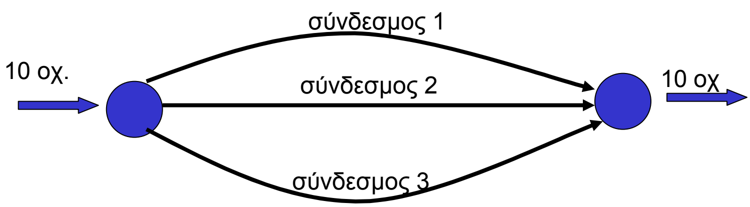
➔ Βήμα 5: Υπολογισμός μέσων όρων.

- $$x_a^* = \frac{1}{4}\sum_{\kappa=0}^{3} x_a^{n-\kappa} \quad \forall a$$

  $\{ x_a^* \}$ είναι οι φόρτοι των συνδέσμων στην κατάσταση ισορροπίας.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

Παράδειγμα: εφαρμογή της μεθόδου καταμερισμού με περιορισμό χωρητικότητας



$$t_1 = 10(1 + 0.15(\frac{x_1}{2})^4)$$

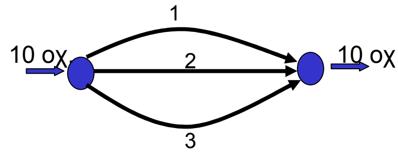
$$t_2 = 20(1 + 0.15(\frac{x_2}{4})^4)$$

$$t_3 = 25(1 + 0.15(\frac{x_3}{3})^4)$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

$$t_1 = 10(1 + 0.15(\frac{x_1}{2})^4) \quad t_2 = 20(1 + 0.15(\frac{x_2}{4})^4) \quad t_3 = 25(1 + 0.15(\frac{x_3}{3})^4)$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1{}^0(0) = 10 \\ t_2{}^0(0) = 20 \\ t_3{}^0(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1{}^0 = 10 \\ x_2{}^0 = 0 \\ x_3{}^0 = 0 \end{array}\right.$$



$$\left.\begin{array}{l} \tau_1{}^1(10) = 948 \\ \tau_2{}^1(0) = 20 \\ \tau_3{}^1(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1{}^1 = 0,75 * 10 + 0,25 * 948 = 244 \\ t_2{}^1 = 0,75 * 20 + 0,25 * 20 = 20 \\ t_3{}^1 = 0,75 * 25 + 0,25 * 25 = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1{}^1 = 0 \\ x_2{}^1 = 10 \\ x_3{}^1 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1{}^2(0) = 10 \\ \tau_2{}^2(10) = 137 \\ \tau_3{}^2(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1{}^2 = 0,75 * 244 + 0,25 * 10 = 185,8 \\ t_2{}^2 = 0,75 * 20 + 0,25 * 137 = 49,3 \\ t_3{}^2 = 0,75 * 25 + 0,25* = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1{}^2 = 0 \\ x_2{}^2 = 0 \\ x_3{}^2 = 10 \end{array}\right.$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

$$t_1 = 10(1 + 0.15(\frac{x_1}{2})^4) \quad t_2 = 20(1 + 0.15(\frac{x_2}{4})^4) \quad t_3 = 25(1 + 0.15(\frac{x_3}{3})^4)$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1{}^3(0) = 10 \\ \tau_2{}^3(0) = 20 \\ \tau_3{}^3(10) = 488 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1{}^3 = 0,75 * 185,8 + 0,25 * 10 = 141,8 \\ t_2{}^3 = 0,75 * 49,3 + 0,25 * 20 = 41,97 \\ t_3{}^3 = 0,75 * 25 + 0,25 * 488 = 140,7 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1{}^3 = 0 \\ x_2{}^3 = 10 \\ x_3{}^3 = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \tau_1{}^4(0) = 10 \\ \tau_2{}^4(10) = 137,2 \\ \tau_3{}^4(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} t_1{}^4 = 0,75 * 141,8 + 0,25 * 10 = 108,9 \\ t_2{}^4 = 0,75 * 41,97 + 0,25 * 137 = 65,8 \\ t_3{}^4 = 0,75 * 140,7 + 0,25 * 25 = 111,8 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1{}^4 = 0 \\ x_2{}^4 = 10 \\ x_3{}^4 = 0 \end{array}\right.$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

Εφαρμογή του αλγόριθμου περιορισμού χωρητικότητας : επανάληψη 0 – 5

t_1^0 =	10		t_2^0 =	20		t_3^0 =	25
x_1^0 =	10		x_2^0 =	0		x_3^0 =	0
τ_1^1 =	947,5		τ_2^1 =	20		τ_3^1 =	25
t_1^1 =	244,4		t_2^1 =	20		t_3^1 =	25
x_1^1 =	0		x_2^1 =	10		x_3^1 =	0
τ_1^2 =	10		τ_2^2 =	137,2		τ_3^2 =	25
t_1^2 =	185,8		t_2^2 =	49,3		t_3^2 =	25
x_1^2 =	0		x_2^2 =	0		x_3^2 =	10
τ_1^3 =	10		τ_2^3 =	20		τ_3^3 =	488
t_1^3 =	141,8		t_2^3 =	41,97		t_3^3 =	140,7
x_1^3 =	0		x_2^3 =	10		x_3^3 =	0
τ_1^4 =	10		τ_2^4 =	137,2		τ_3^4 =	25
t_1^4 =	108,9		t_2^4 =	65,78		t_3^4 =	111,8
x_1^4 =	0		x_2^4 =	10		x_3^4 =	0
τ_1^5 =	10		τ_2^5 =	137,2		τ_3^5 =	25
t_1^5 =	84,16		t_2^5 =	83,63		t_3^5 =	90,1
x_1^5 =	0		x_2^5 =	10		x_3^5 =	0

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

Εφαρμογή του αλγόριθμου περιορισμού χωρητικότητας : επανάληψη 6 – 10

τ_1^6 =	10		τ_2^6 =	137,2		τ_3^6 =	25
t_1^6 =	65,62		t_2^6 =	97,02		t_3^6 =	73,83
x_1^6 =	10		x_2^6 =	0		x_3^6 =	0
τ_1^7 =	947,5		τ_2^7 =	20		τ_3^7 =	25
t_1^7 =	286,1		t_2^7 =	77,76		t_3^7 =	61,62
x_1^7 =	0		x_2^7 =	0		x_3^7 =	10
τ_1^8 =	10		τ_2^8 =	20		τ_2^8 =	488
t_1^8 =	217,1		t_2^8 =	63,32		t_3^8 =	168,2
x_1^8 =	0		x_2^8 =	10		x_3^8 =	0
τ_1^9 =	10		τ_2^9 =	137,2		τ_3^9 =	25
t_1^9 =	165,3		t_2^9 =	81,79		t_3^9 =	132,4
x_1^9 =	0		x_2^9 =	10		x_3^9 =	0
τ_1^{10} =	10		τ_2^{10} =	137,2		τ_3^{10} =	25
t_1^{10} =	126,5		t_2^{10} =	95,64		t_3^{10} =	105,6
x_1^{10} =	0		x_2^{10} =	10		x_3^{10} =	0

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγορ. περιορισμού χωρητικότητας

Για εφαρμογή του αλγορίθμου για 10 επαναλήψεις, δηλ. n=10

$$x_a^* = \frac{1}{4}\sum_{\kappa=0}^{3} x_a^{n-\kappa} \quad \forall a \quad \Rightarrow x_a^* = \frac{1}{4}\sum_{i=7}^{10} x_a^i \quad \Rightarrow$$

$$x_1^* = \frac{0+0+0+0}{4} = 0 \quad \Rightarrow \quad t_1^* = 10$$

$$x_2^* = \frac{0+10+10+10}{4} = 7{,}5 \quad \Rightarrow \quad t_2^* = 57{,}1$$

$$x_3^* = \frac{10+0+0+0}{4} = 2{,}5 \quad \Rightarrow \quad t_2^* = 26{,}8$$

Μετά από 10 επαναλήψεις οι φόρτοι δεν συγκλίνουν προς μια κατάσταση ισορροπίας

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

Αλγόριθμός καταμερισμού με τμηματική φόρτιση

➔ Βήμα 0: προκαταρτικά

- Διαίρεσε τον αριθμό των μετακινήσεων μεταξύ κάθε ζεύγους Π-Π σε Ν ίσα μερίδια $(T_{ij}^n = T_{ij}/N)$
- $n = 1$ και $x_a^0 = 0 \ \forall \ \alpha$.

➔ Βήμα 1: Ενημέρωση

- $t_a^n = t_a(x_a^{n-1}) \ \forall \ \alpha$.

➔ Βήμα 2: Τμηματική φόρτιση

- Εφαρμογή καταμερισμού «όλα ή τίποτα» με βάση τους χρόνους t_a^n αλλά χρησιμοποιώντας τις μετακινήσεις T_{ij}^n για κάθε ζεύγος Π – Π i,j. Ο καταμερισμός αυτός υπολογίζει τους φόρτους $\{ w_a^n \}$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

Αλγόριθμός καταμερισμού με τμηματική φόρτιση

➔ Βήμα 3: Άθροιση του φόρτου

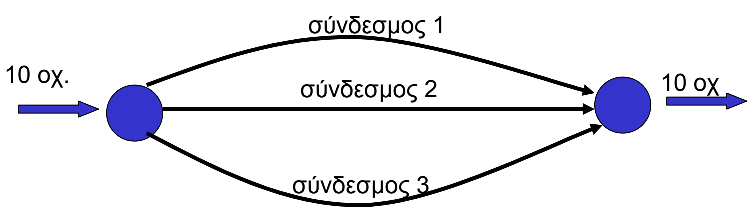
- $x_a^n = x_a^{n-1} + w_a^n \quad \forall\ \alpha.$

➔ Βήμα 4: Κανόνας τερματισμού

- Εάν $n=N$, ο αλγόριθμος τερματίζει, και οι φόρτοι ισορροπίας είναι οι τελευταίοι φόρτοι x_a^n που υπολογίσθηκαν, αλλιώς $n=n+1$ και πήγαινε στο βήμα 1.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

Παράδειγμα: εφαρμογή της μεθόδου καταμερισμού με τμηματική φόρτιση



$$t_1 = 10(1 + 0.15(\frac{x_1}{2})^4)$$

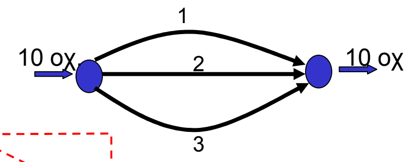
$$t_2 = 20(1 + 0.15(\frac{x_2}{4})^4)$$

$$t_3 = 25(1 + 0.15(\frac{x_3}{3})^4)$$

Θεωρούμε ότι N=10, επομένως σε κάθε τμηματική φόρτιση χρησιμοποιείται το 10% της συνολικής ζήτησης: 10x10%=1

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

$$t_1 = 10(1 + 0.15(\frac{x_1}{2})^4) \quad t_2 = 20(1 + 0.15(\frac{x_2}{4})^4) \quad t_3 = 25(1 + 0.15(\frac{x_3}{3})^4)$$



$$\left.\begin{array}{l} x_1^{\,0} = 0 \\ x_2^{\,0} = 0 \\ x_3^{\,0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1^{\,1}(0) = 10 \\ t_2^{\,1}(0) = 20 \\ t_3^{\,1}(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1^{\,1} = 1 \\ w_2^{\,1} = 0 \\ w_3^{\,1} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^{\,1} = 0 + 1 = 1 \\ x_2^{\,1} = 0 + 0 = 0 \\ x_3^{\,1} = 0 + 0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1^{\,2}(1) = 10{,}09 \\ t_2^{\,2}(0) = 20 \\ t_3^{\,2}(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1^{\,2} = 1 \\ w_2^{\,2} = 0 \\ w_3^{\,2} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^{\,2} = 1 + 1 = 2 \\ x_2^{\,2} = 0 + 0 = 0 \\ x_3^{\,2} = 0 + 0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

$$t_1 = 10(1 + 0.15(\frac{x_1}{2})^4) \quad t_2 = 20(1 + 0.15(\frac{x_2}{4})^4) \quad t_3 = 25(1 + 0.15(\frac{x_3}{3})^4)$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1^{\,3}(2) = 11{,}25 \\ t_2^{\,3}(0) = 20 \\ t_3^{\,3}(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1^{\,3} = 1 \\ w_2^{\,3} = 0 \\ w_3^{\,3} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^{\,3} = 2 + 1 = 3 \\ x_2^{\,3} = 0 + 0 = 0 \\ x_3^{\,3} = 0 + 0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} t_1^{\,4}(10) = 17{,}59 \\ t_2^{\,4}(0) = 20 \\ t_3^{\,4}(0) = 25 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} w_1^{\,4} = 1 \\ w_2^{\,4} = 0 \\ w_3^{\,4} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x_1^{\,4} = 1 + 3 = 4 \\ x_2^{\,4} = 0 + 0 = 0 \\ x_3^{\,4} = 0 + 0 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$$

. . . .

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

Εφαρμογή του αλγόριθμου τμηματικής φόρτισης : επανάληψη 0 – 5

$t_1^0 =$	10	$t_2^0 =$	20	$t_3^0 =$	25
$x_1^0 =$	1	$x_2^0 =$	0	$x_3^0 =$	0
$t_1^1 =$	10,09	$t_2^1 =$	20	$t_3^1 =$	25
$w_1^1 =$	1	$w_2^1 =$	0	$w_3^1 =$	0
$x_1^1 =$	2	$x_2^1 =$	0	$x_3^1 =$	0
$t_1^2 =$	11,5	$t_2^2 =$	20	$t_3^2 =$	25
$w_1^2 =$	1	$w_2^2 =$	0	$w_3^2 =$	0
$x_1^2 =$	3	$x_2^2 =$	0	$x_3^2 =$	0
$t_1^3 =$	17,59	$t_2^3 =$	20	$t_3^3 =$	25
$w_1^3 =$	1	$w_2^3 =$	0	$w_3^3 =$	0
$x_1^3 =$	4	$x_2^3 =$	0	$x_3^3 =$	0
$t_1^4 =$	34	$t_2^4 =$	20	$t_3^4 =$	25
$w_1^4 =$	0	$w_2^4 =$	1	$w_3^4 =$	0
$x_1^4 =$	4	$x_2^4 =$	1	$x_3^4 =$	0
$t_1^5 =$	34	$t_2^5 =$	20	$t_3^5 =$	25
$w_1^5 =$	0	$w_2^5 =$	1	$w_3^5 =$	0
$x_1^5 =$	4	$x_2^5 =$	2	$x_3^5 =$	0

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

Εφαρμογή του αλγόριθμου τμηματικής φόρτισης : επανάληψη 6 – 10

$t_1^6 =$	34	$t_2^6 =$	20,188	$t_3^6 =$	25
$w_1^6 =$	0	$w_2^6 =$	1	$w_3^6 =$	0
$x_1^6 =$	4	$x_2^6 =$	3	$x_3^6 =$	0
$t_1^7 =$	34	$t_2^7 =$	20,949	$t_3^7 =$	25
$w_1^7 =$	0	$w_2^7 =$	1	$w_3^7 =$	0
$x_1^7 =$	4	$x_2^7 =$	4	$x_3^7 =$	0
$t_1^8 =$	34	$t_2^8 =$	23	$w_2^8 =$	25
$w_1^8 =$	0	$w_2^8 =$	1	$t_3^8 =$	0
$x_1^8 =$	4	$x_2^8 =$	5	$x_3^8 =$	0
$t_1^9 =$	34	$t_2^9 =$	27,324	$t_3^9 =$	25
$w_1^9 =$	0	$w_2^9 =$	0	$w_3^9 =$	1
$x_1^9 =$	4	$x_2^9 =$	5	$x_3^9 =$	1
$t_1^{10} =$	34	$t_2^{10} =$	27,324	$t_3^{10} =$	25,05

Δεν υπάρχει σύγκλιση προς την κατάσταση ισορροπίας

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας

Προτυποποίηση του καταμερισμού ισορροπίας σαν ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Το ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

(Beckman *et al.* 1956)

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

α : σύνδεσμος του δικτύου

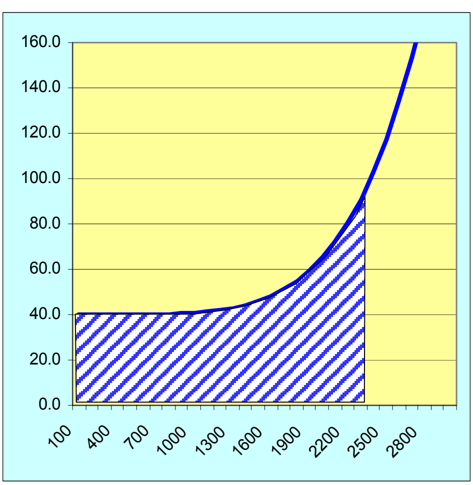
t_α : συνάρτηση χρόνου διαδρομής του συνδέσμου i

ω : η μεταβλητή του προβλήματος βελτιστοποίησης (δηλ. ο κυκλοφοριακός φόρτος του συνδέσμου)

x_a : η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής (δηλ. ο κυκλοφοριακός φόρτος ισορροπίας στον σύνδεσμο a)

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Προτυποποίηση του καταμερισμού ισορροπίας σαν ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης



$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(\omega) d\omega$$

Αυτό το πρόβλημα ισοδυναμεί με την ελαχιστοποίηση του αθροίσματος των εμβαδών κάτω από τις καμπύλες των συναρτήσεων χρόνου – φόρτου για όλους τους συνδέσμους του δικτύου

Υπό τους περιορισμούς

$$\sum_k f_k^{rs} = q_{rs} \quad \forall\, r,s$$

$$f_k^{rs} \geq 0 \quad \forall\, k,r,s$$

$$x_a = \sum_r \sum_s \sum_k f_k^{rs}.\delta_{a,k}^{rs} \qquad \forall\, a$$

Όπως ορίσθηκαν από τις σχέσεις μεταξύ φόρτων στους συνδέσμους (x_α) και φόρτων κατά μήκος των διαδρομών (f_k^{rs}).

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Αλγόριθμός επίλυσης του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης

➔ Βήμα 0: Έναρξη

- Εφαρμογή της μεθόδου καταμερισμού «Όλα ή Τίποτα» με βάση τους χρόνους διαδρομής $t_a^0 = t_a(0)$ για κάθε σύνδεσμο a. Ο καταμερισμός έχει σαν αποτέλεσμα τους φόρτους σε όλους τους συνδέσμους $\{x_a^1\}$.
- Έναρξη αρίθμησης επαναλήψεων, $n=1$

➔ Βήμα 1: Ενημέρωση :

- $t_a^n = t_a(x_a^n)$ για κάθε σύνδεσμο a.

➔ Βήμα 2: Προσδιορισμός κατεύθυνσης που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση βελτιστοποίησης

- Εφαρμογή της μεθόδου καταμερισμού «Όλα ή Τίποτα» με βάση τους χρόνους διαδρομής t_a^n. Ο καταμερισμός έχει σαν αποτέλεσμα τους «*βοηθητικούς*» φόρτους σε όλους τους συνδέσμους $\{y_a^1\}$.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Αλγόριθμός επίλυσης του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης

➔ Βήμα 3: Υπολογισμός του βήματος προσέγγισης κατά την βέλτιστη κατεύθυνση.

- Εύρεση της τιμής του λ που επιλύει το πρόβλημα

$$\min_{0\le\lambda\le1} \sum_a \int_0^{x_a^n+\lambda(y_a^n-x_a^n)} t_a(\omega)d\omega$$

➔ Βήμα 4: Προσέγγιση

- $x_a^{n+1} = x_a^n + \lambda_n(y_a^n - x_a^n), \quad \forall a.$

➔ Βήμα 5: Τέστ σύγκλισης.

- Εάν το κριτήριο σύγκλισης ικανοποιείται, ο αλγόριθμος τερματίζει και οι φόρτοι ισορροπίας είναι οι τελευταίοι φόρτοι που υπολογίσθηκαν $\{x_a^{n+1}\}$, αλλιώς $n=n+1$ και πήγαινε στο βήμα 1.

Επίλυση του καταμερισμού σαν ισοδύναμο πρόγραμμα βελτιστοποίησης

- Οι μέθοδοι καταμερισμού με περιορισμό χωρητικότητας και τμηματικού καταμερισμού δίνουν λύσεις που προσεγγίζουν την κατάσταση ισορροπίας. Πολλές φορές τα αποτελέσματα δεν είναι όμως ικανοποιητικά, αλλά αποτελούσαν τις πλέον καθιερωμένες μεθόδους μέχρι τα μέσα της δεκαετίας του 70 οπότε επιλύθηκε μαθηματικά το πρόβλημα του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης και αναπτύχθηκαν τα πρώτα προγράμματα Η/Υ.
- Η προτυποποίηση του προβλήματος σαν ένα ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης εγγυάται την επίλυση του προβλήματος του καταμερισμού ισορροπίας. Αποτελεί όμως ένα πολύ πιο δύσκολο πρόβλημα.
- Ένα από τα δυσκολότερα προβλήματα στον αλγόριθμο που περιγράφηκε είναι ο προσδιορισμός των τιμών της παραμέτρου λ με επίλυση του προγράμματος ελαχιστοποίησης:

$$\min_{0\le\lambda\le1} \sum_a \int_0^{x_a^n+\lambda(y_a^n-x_a^n)} t_a(\omega)d\omega$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

- Έχει πειραματικά αποδειχθεί ότι μια καλή προσέγγιση του λ που έχει συνήθως ικανοποιητικά αποτελέσματα δίδεται από τις σχέσεις

$$\lambda_n = \frac{1}{n} \quad ή \quad \lambda_n = 2^{-n}$$

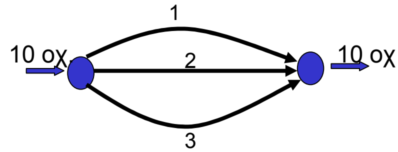
- Με την χρήση μιας από αυτές τις τιμές του συντελεστή λ, ο αλγόριθμος επίλυσης του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης απλοποιείται ουσιαστικά.
- Στο παράδειγμα που ακολουθεί χρησιμοποιούμε την τιμή $\lambda_n = \frac{1}{n}$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου επίλυσης του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης με λ=1/ν

$$\boxed{t_1 = 10(1+0.15(\frac{x_1}{2})^4) \quad t_2 = 20(1+0.15(\frac{x_2}{4})^4) \quad t_3 = 25(1+0.15(\frac{x_3}{3})^4)}$$

$$\left.\begin{matrix} t_1^{\,0}(0)=10 \\ t_2^{\,0}(0)=20 \\ t_3^{\,0}(0)=25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x_1^{\,1}=10 \\ x_2^{\,1}=0 \\ x_3^{\,1}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$



$$\left.\begin{matrix} t_1^{\,1}(10)=947{,}5 \\ t_2^{\,1}(0)=20 \\ t_3^{\,1}(0)=25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1^{\,1}=0 \\ y_2^{\,1}=10 \\ y_3^{\,1}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^{\,2}=10+(1/1)*(0-10)=0 \\ x_2^{\,2}=0+(1/1)*(10-0)=10 \\ x_3^{\,2}=0+(1/1)*(0-0)=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} t_1^{\,2}(0)=10 \\ t_2^{\,2}(10)=137{,}2 \\ t_3^{\,2}(0)=25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1^{\,2}=10 \\ y_2^{\,2}=0 \\ y_3^{\,2}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^{\,3}=0+(1/2)*(10-0)=5 \\ x_2^{\,3}=10+(1/2)*(0-10)=5 \\ x_3^{\,3}=0+(1/2)*(0-0)=0 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Αλγόριθμος τμηματικής φόρτισης

$$\boxed{t_1 = 10(1+0.15(\frac{x_1}{2})^4) \quad t_2 = 20(1+0.15(\frac{x_2}{4})^4) \quad t_3 = 25(1+0.15(\frac{x_3}{3})^4)}$$

$$\left.\begin{matrix} t_1^{\,3}(5)=68{,}6 \\ t_2^{\,3}(5)=27{,}3 \\ t_3^{\,3}(0)=25 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1^{\,3}=0 \\ y_2^{\,3}=0 \\ y_3^{\,3}=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^{\,4}=5+(1/3)*(0-5)=3{,}33 \\ x_2^{\,4}=5+(1/3)*(0-5)=3{,}33 \\ x_3^{\,4}=0+(1/3)*(10-0)=3{,}33 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} t_1^{\,4}(3{,}33)=21{,}57 \\ t_2^{\,4}(3{,}33)=21{,}44 \\ t_3^{\,4}(3{,}33)=30{,}72 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1^{\,4}=0 \\ y_2^{\,4}=10 \\ y_3^{\,4}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^{\,5}=3{,}33+(1/4)*(0-3{,}33)=2{,}5 \\ x_2^{\,5}=3{,}33+(1/4)*(10-3{,}33)=5 \\ x_3^{\,5}=3{,}33+(1/4)*(0-3{,}33)=2{,}5 \end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix} t_1^{\,5}(2{,}5)=13{,}66 \\ t_2^{\,5}(5)=27{,}32 \\ t_3^{\,5}(2{,}5)=26{,}81 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} y_1^{\,5}=10 \\ y_2^{\,5}=0 \\ y_3^{\,5}=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x_1^{\,6}=2{,}5+(1/5)*(10-2{,}5)=4 \\ x_2^{\,6}=5+(1/5)*(0-5)=4 \\ x_3^{\,6}=2{,}5+(1/5)*(0-2{,}5)=2 \end{matrix}\right. \Rightarrow$$

. . . .

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Εφαρμογή του αλγόριθμου του ισοδύναμου προβλήματος βελτιστοποίησης :

επανάληψη 0 – 7

Επανά ληψη (n)	λ	σύνδεσμος 1			σύνδεσμος 2			σύνδεσμος 3	
0	0,000	t_1^n =	10		t_2^n =	20		t_3^n =	25
0	0,000	x_1^n =	10		x_2^n =	0		x_3^n =	0
1	1,000	t_1^n =	947,5		t_2^n =	20		t_3^n =	25
1	1,000	y_1^n =	0		y_2^n =	10		y_3^n =	0
1	1,000	x_1^{n+1} =	0		x_2^{n+1} =	10		x_3^{n+1} =	0
2	0,500	t_1^n =	10		t_2^n =	137,188		t_3^n =	25
2	0,500	y_1^n =	10		y_2^n =	0		y_3^n =	0
2	0,500	x_1^{n+1} =	5		x_2^{n+1} =	5		x_3^{n+1} =	0
3	0,333	t_1^n =	68,59		t_2^n =	27,3242		t_3^n =	25
3	0,333	y_1^n =	0		y_2^n =	0		y_3^n =	10
3	0,333	x_1^{n+1} =	3,333		x_2^{n+1} =	3,33333		x_3^{n+1} =	3,3333
4	0,250	t_1^n =	21,57		t_2^n =	21,4468		t_3^n =	30,716
4	0,250	y_1^n =	0		y_2^n =	10		y_3^n =	0
4	0,250	x_1^{n+1} =	2,5		x_2^{n+1} =	5		x_3^{n+1} =	2,5
5	0,200	t_1^n =	13,66		t_2^n =	27,3242		t_3^n =	26,808
5	0,200	y_1^n =	10		y_2^n =	0		y_3^n =	0
5	0,200	x_1^{n+1} =	4		x_2^{n+1} =	4		x_3^{n+1} =	2
6	0,167	t_1^n =	34		t_2^n =	23		t_3^n =	25,741
6	0,167	y_1^n =	0		y_2^n =	10		y_3^n =	0
6	0,167	x_1^{n+1} =	3,333		x_2^{n+1} =	5		x_3^{n+1} =	1,6667
7	0,143	t_1^n =	21,57		t_2^n =	27,3242		t_3^n =	25,357
7	0,143	y_1^n =	10		y_2^n =	0		y_3^n =	0
7	0,143	x_1^{n+1} =	4,286		x_2^{n+1} =	4,28571		x_3^{n+1} =	1,4286

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Εφαρμογή του αλγόριθμου του ισοδύναμου προβλήματος βελτιστοποίησης :

επανάληψη 8 – 14

Επανά ληψη (n)	λ	σύνδεσμος 1			σύνδεσμος 2			σύνδεσμος 3	
8	0,125	t_1^n =	41,63		t_2^n =	23,9534		t_3^n =	25,193
8	0,125	y_1^n =	0		y_2^n =	10		y_3^n =	0
8	0,125	x_1^{n+1} =	3,75		x_2^{n+1} =	5		x_3^{n+1} =	1,25
9	0,111	t_1^n =	28,54		t_2^n =	27,3242		t_3^n =	25,113
9	0,111	y_1^n =	0		y_2^n =	0		y_3^n =	10
9	0,111	x_1^{n+1} =	3,333		x_2^{n+1} =	4,44444		x_3^{n+1} =	2,2222
10	0,100	t_1^n =	21,57		t_2^n =	24,5725		t_3^n =	26,129
10	0,100	y_1^n =	10		y_2^n =	0		y_3^n =	0
10	0,100	x_1^{n+1} =	4		x_2^{n+1} =	4		x_3^{n+1} =	2
11	0,091	t_1^n =	34		t_2^n =	23		t_3^n =	25,741
11	0,091	y_1^n =	0		y_2^n =	10		y_3^n =	0
11	0,091	x_1^{n+1} =	3,636		x_2^{n+1} =	4,54545		x_3^{n+1} =	1,8182
12	0,083	t_1^n =	26,39		t_2^n =	25,0025		t_3^n =	25,506
12	0,083	y_1^n =	0		y_2^n =	10		y_3^n =	0
12	0,083	x_1^{n+1} =	3,333		x_2^{n+1} =	5		x_3^{n+1} =	1,6667
13	0,077	t_1^n =	21,57		t_2^n =	27,3242		t_3^n =	25,357
13	0,077	y_1^n =	10		y_2^n =	0		y_3^n =	0
13	0,077	x_1^{n+1} =	3,846		x_2^{n+1} =	4,61538		x_3^{n+1} =	1,5385
14	0,071	t_1^n =	30,52		t_2^n =	25,3176		t_3^n =	25,259
14	0,071	y_1^n =	0		y_2^n =	0		y_3^n =	10
14	0,071	x_1^{n+1} =	3,571		x_2^{n+1} =	4,28571		x_3^{n+1} =	2,1429

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Εφαρμογή του αλγόριθμου του ισοδύναμου προβλήματος βελτιστοποίησης :

επανάληψη 8 – 14

Επανάληψη (n)	λ	σύνδεσμος 1			σύνδεσμος 2			σύνδεσμος 3	
15	0,067	$t_1^n =$	25,25		$t_2^n =$	23,9534		$t_3^n =$	25,976
15	0,067	$y_1^n =$	0		$y_2^n =$	10		$y_3^n =$	0
15	0,067	$x_1^{n+1} =$	3,333		$x_2^{n+1} =$	4,66667		$x_3^{n+1} =$	2
16	0,063	$t_1^n =$	21,57		$t_2^n =$	25,5579		$t_3^n =$	25,741
16	0,063	$y_1^n =$	10		$y_2^n =$	0		$y_3^n =$	0
16	0,063	$x_1^{n+1} =$	3,75		$x_2^{n+1} =$	4,375		$x_3^{n+1} =$	1,875
17	0,059	$t_1^n =$	28,54		$t_2^n =$	24,2933		$t_3^n =$	25,572
17	0,059	$y_1^n =$	0		$y_2^n =$	10		$y_3^n =$	0
17	0,059	$x_1^{n+1} =$	3,529		$x_2^{n+1} =$	4,70588		$x_3^{n+1} =$	1,7647
18	0,056	$t_1^n =$	24,55		$t_2^n =$	25,7471		$t_3^n =$	25,449
18	0,056	$y_1^n =$	10		$y_2^n =$	0		$y_3^n =$	0
18	0,056	$x_1^{n+1} =$	3,889		$x_2^{n+1} =$	4,44444		$x_3^{n+1} =$	1,6667
19	0,053	$t_1^n =$	31,44		$t_2^n =$	24,5725		$t_3^n =$	25,357
19	0,053	$y_1^n =$	0		$y_2^n =$	10		$y_3^n =$	0
19	0,053	$x_1^{n+1} =$	3,684		$x_2^{n+1} =$	4,73684		$x_3^{n+1} =$	1,5789
20	0,050	$t_1^n =$	27,27		$t_2^n =$	25,8998		$t_3^n =$	25,288
20	0,050	$y_1^n =$	0		$y_2^n =$	0		$y_3^n =$	10
20	0,050	$x_1^{n+1} =$	3,5		$x_2^{n+1} =$	4,5		$x_3^{n+1} =$	2
21	0,048	$t_1^n =$	24,07		$t_2^n =$	24,8054		$t_3^n =$	25,741
21	0,048	$y_1^n =$	10		$y_2^n =$	0		$y_3^n =$	0
21	0,048	$x_1^{n+1} =$	3,81		$x_2^{n+1} =$	4,28571		$x_3^{n+1} =$	1,9048

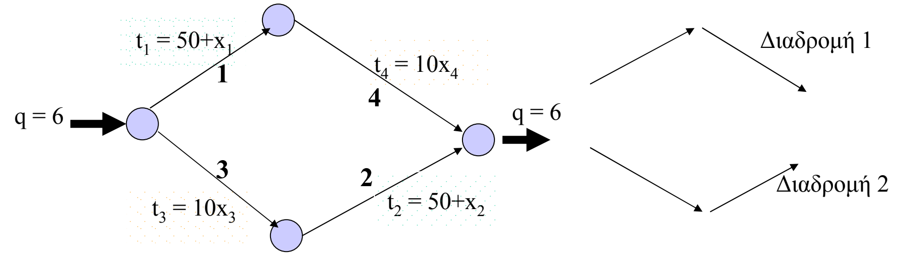
Κατάσταση ισορροπίας

Η κατασκευή περισσότερων δρόμων δεν είναι συνεπάγεται πάντα μείωση του χρόνου μετακίνησης

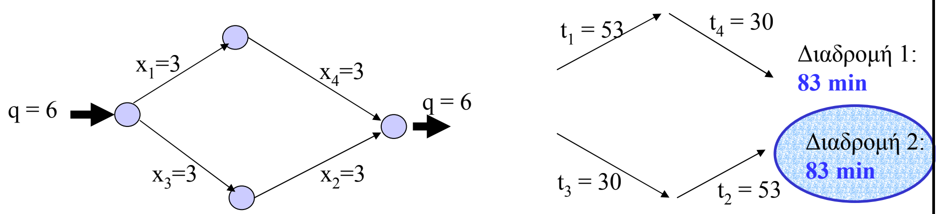
το παράδοξο του Braess

Το παράδοξο του Braess αποδεικνύει θεωρητικά πώς κάτω από ορισμένες συνθήκες η κατασκευή νέων οδικών τμημάτων μπορεί τελικά να οδηγήσει σε αύξηση του συνολικού χρόνου μετακίνησης.

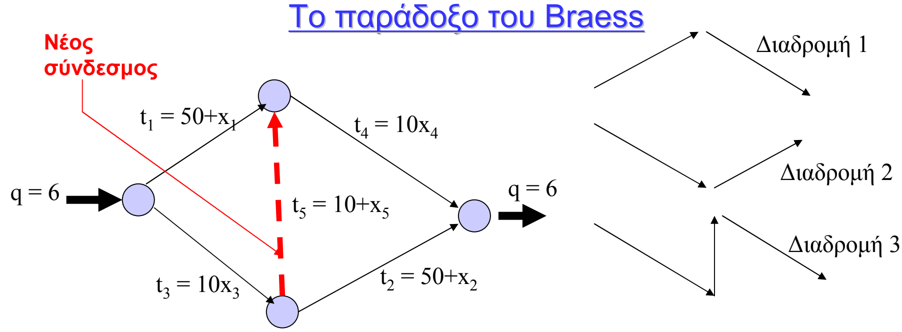
Το παράδοξο του Braess



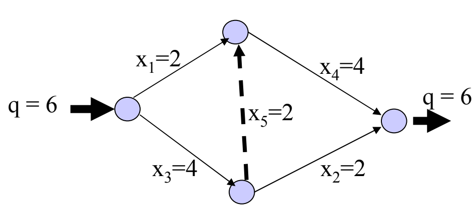
κατάσταση ισορροπίας

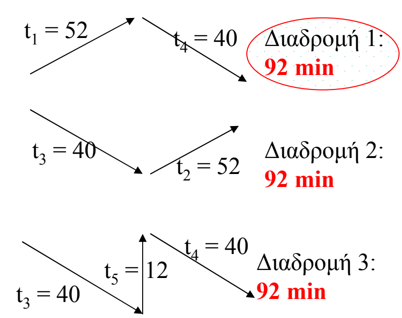


Το παράδοξο του Braess



Κατάσταση ισορροπίας





ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά μοντέλα ισορροπίας

Κριτική θεώρηση των στατικών ντετερμινιστικών μοντέλων καταμερισμού

Πλεονεκτήματα:

- αλγόριθμοι επίλυσης
  υψηλή υπολογιστική απόδοση
- δυνατότητα επίλυσης μεγάλων δικτύων

Μειονεκτήματα: αφορούν τις παραδοχές της αρχής ισορροπίας των χρηστών που αποτελεί την βάση της τυποποίησης των στατικών μοντέλων

- πλήρης γνώση κυκλοφοριακών συνθηκών
  οι οδηγοί γνωρίζουν τους χρόνους διαδρομής κατά μήκος όλων των διαδρομών που ενώνουν τα σημεία αρχής και τέλους του ταξιδιού τους
- οικονομικά ορθολογική συμπεριφορά
  οι οδηγοί επιλέγουν την διαδρομή τους με βάση αυστηρά κριτήρια οικονομικού ορθολογισμού δηλ. ελαχιστοποίηση του χρόνου (κόστους) διαδρομής

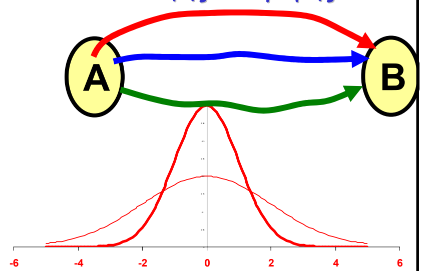
ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά στοχαστικά μοντέλα

Στοχαστικός στατικός καταμερισμός στο δίκτυο

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά στοχαστικά μοντέλα

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ εφαρμογής στοχαστικού μοντέλου επιλογής διαδρομής

	Αντιληπτός χρόνος		Πραγματικός χρόνος
	Οδηγός 1	Οδηγός 2	
Διαδρομή 1	25	20	21
Διαδρομή 2	20	25	22
Διαδρομή 3	25	25	23



Αντιληπτός χρόνος = Πραγματικός χρόνος + Σφάλμα αντίληψης, ανάλυσης, πληροφόρησης

Λόγω ελλιπούς γνώσης των κυκλοφοριακών συνθηκών, οι μετακινούμενοι κάνουν υποθέσεις σχετικά με τον χρόνο διαδρομής κατά μήκος των εναλλακτικών διαδρομών που οδηγούν στον προορισμό τους. Ο χρόνος διαδρομής όπως τον αντιλαμβάνεται ο κάθε οδηγός είναι διαφορετικός από τον πραγματικό χρόνο διαδρομής όπως τον μετρά ο αναλυτής. Έτσι ένα ντετερμινιστικό μοντέλο θα υπολόγιζε ότι και οι δύο οδηγοί θα χρησιμοποιήσουν την συντομότερη διαδρομή 1. Όμως ο πρώτος οδηγός αντιλαμβάνεται την διαδρομή 2 ως την συντομότερη μεταξύ των τριών.

Η αρχή της στοχαστικής ισορροπίας

ελλιπής γνώση κυκλοφοριακών συνθηκών

Κάθε χρήστης αντιλαμβάνεται διαφορετικά τον χρόνο που απαιτείται για να διανυθεί ένας σύνδεσμος του δικτύου

Μη οικονομικά ορθολογική συμπεριφορά

Πλέον του χρόνου (κόστους) διαδρομής και άλλοι παράγοντες μπορεί να επηρεάζουν την επιλογή της διαδρομής

Κάθε οδηγός προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει τον αντιληπτό χρόνο (κόστος) διαδρομής

<u>Αρχή στοχαστικής ισορροπίας χρηστών (Daganzo & Sheffi, 1977)</u>

Στην κατάσταση στοχαστικής ισορροπίας του δικτύου, κανένας χρήστης δεν <u>πιστεύει</u> ότι μπορεί να ελαττώσει τον χρόνο διαδρομής του με μια αλλαγή της διαδρομής του

Στοχαστική & κλασσική συνθήκη ισορροπίας

Ο αντιληπτός χρόνος διαδρομής μπορεί να τυποποιηθεί σαν μια **τυχαία μεταβλητή** κατανεμημένη σε όλο τον πληθυσμό των οδηγών, με **μέση τιμή ίση με τον πραγματικό χρόνο διαδρομής**

Η στοχαστική συνθήκη ισορροπίας αποτελεί **γενίκευση** της κλασσικής αρχής του Wardrop

Εάν η αντίληψη του χρόνου διαδρομής είναι ακριβής ⇒ φόρτοι στοχαστικής ισορροπίας = φόρτοι ντετερμινιστικής ισορροπίας

Αντιληπτός χρόνος διαδρομής

Ο αντιληπτός χρόνος διαδρομής αναπαριστά τον χρόνο διαδρομής όπως τον αντιλαμβάνονται οι οδηγοί. Ο αντιληπτός χρόνος μπορεί να τυποποιηθεί σαν μια τυχαία μεταβλητή κατανεμημένη σε όλο τον πληθυσμό των οδηγών, με μέση τιμή ίση με τον πραγματικό χρόνο διαδρομής

$$T_a = tt_a(q_a) + \varepsilon_\alpha$$

α : σύνδεσμος του δικτύου

T_α : αντιληπτός χρόνος (κόστος) διαδρομής του συνδέσμου α *(τυχαία μεταβλητή)*

q_α : ο φόρτος του συνδέσμου α

$tt_a(q_a)$: ο πραγματικός χρόνου διαδρομής του συνδέσμου a (που είναι συνάρτηση του φόρτου), $E[T_a] = tt_a(q_a)$

ε : τυχαία μεταβλητή που περιλαμβάνει τα σφάλματα αντίληψης, (*που οφείλονται κυρίως στο γεγονός ότι οι οδηγοί δεν έχουν πληροφορία/ γνώση των κυκλοφοριακών συνθηκών σε όλο το δίκτυο)* και άλλους μη δυνάμενους να προσδιορισθούν παράγοντες που επηρεάζουν την επιλογή του οδηγού.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Στατικά ντετερμινιστικά μοντέλα

Κατηγορίες στατικών στοχαστικών μοντέλων καταμερισμού

Όπως και στην περίπτωση των ντετερμινιστικών μοντέλων καταμερισμού, τα στατικά στοχαστικά μοντέλα χωρίζονται σε δύο βασικές κατηγορίες ανάλογα με το αν θεωρούν ότι ο χρόνος διαδρομής σε ένα σύνδεσμο του δικτύου είναι συνάρτηση του κυκλοφοριακού φόρτου.

Καταμερισμός

« Στοχαστικής φόρτισης δικτύου »

που θεωρεί ότι ο χρόνος διαδρομής σε ένα σύνδεσμο είναι ανεξάρτητος του φόρτου που χρησιμοποιεί τον σύνδεσμο

Μέθοδος Burrel

Μέθοδος Dial.

Καταμερισμός

« Στοχαστικής ΙΣΟΡΡΟΠΙΑΣ »

που λαμβάνει υπόψη του την κυκλοφοριακή συμφόρηση και θεωρεί ότι ο χρόνος διαδρομής σε ένα σύνδεσμο εξαρτάται από τον φόρτο που χρησιμοποιεί τον σύνδεσμο.

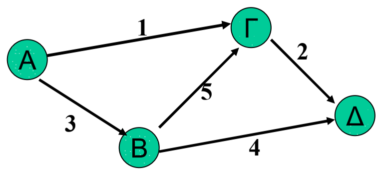
Μέθοδος ισοδύναμου προβλήματος βελτιστοποίησης

Αλγόριθμος του Burrel

- Βασικές παραδοχές
  - Κάθε οδηγός επιλέγει την διαδρομή με το μικρότερο κόστος
  - Κάθε οδηγός αντιλαμβάνεται το κόστος διαφορετικά
  - Το αντιληπτό κόστος σε κάθε σύνδεσμο του δικτύου ακολουθεί μια κατανομή της οποίας η μέση τιμή είναι το πραγματικό κόστος που μετράται κάτω από κανονικές συνθήκες
  - Οι κατανομές κόστους των συνδέσμων είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους
- Ο αλγόριθμος Burrel είναι στην ουσία ένα αλγόριθμος προσομοίωσης
  - Για κάθε μετακίνηση ενός συγκεκριμένου ζεύγους Π-Π επιλέγονται από τις κατανομές κόστους συγκεκριμένες τιμές που αντιπροσωπεύουν το κόστος κάθε συνδέσμου. Στην συνέχεια η μετακίνηση ακολουθεί την συντομότερη διαδρομή
  - Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για όλες τις μετακινήσεις στο δίκτυο
  - Συνήθως χρησιμοποιείται η κανονική, ή η ορθογωνική (ομοιόμορφη) κατανομή

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου του Burrel

Ο αντιληπτός χρόνος διαδρομής σε κάθε σύνδεσμο του δικτύου ακολουθεί ορθογωνική/ομοιόμορφη κατανομή.



Το φάσμα τιμών του αντιληπτού χρόνου δίνεται στον ακόλουθο πίνακα:

Σύνδεσμος *(i)*	**Ελάχιστος αντιληπτός χρόνος** t_i^{min}	**Μέγιστος αντιληπτός χρόνος** t_i^{max}
1	**10**	**13**
2	**6**	**8**
3	**6**	**8**
4	**9**	**13**
5	**2**	**7**

Να υπολογισθεί πως θα καταμερισθούν στο δίκτυο 6 μετακινήσεις από τον κόμβο Α στον κόμβο Β

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου του Burrel

- Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι οι φόρτοι μπορούν να υπολογισθούν με εφαρμογή του αλγόριθμου Burrel.
- Για τον υπολογισμό των φόρτων σε κάθε σύνδεσμο του δικτύου θα πρέπει να προσδιορισθεί η διαδρομή που ο κάθε μετακινούμενος αντιλαμβάνεται ως η συντομότερη και την οποία επομένως θα επιλέξει.
- Για τον προσδιορισμό του αντιληπτού χρόνου κάθε διαδρομής, προσδιορίζεται κατ΄ αρχάς ο χρόνος διαδρομής του κάθε συνδέσμου όπως τον αντιλαμβάνεται ο κάθε μετακινούμενος.
- Δεδομένου ότι ο αντιληπτός χρόνος του κάθε συνδέσμου ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή που ορίζεται από την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή του, μια τυχαία τιμή του αντιληπτού χρόνου διαδρομής του συνδέσμου i, υπολογίζεται από την σχέση:

$$t_i^{αντιληπτός} = t_i^{\min} + RND \times (t_i^{\max} - t_i^{\min})$$

Όπου RND ένας τυχαίος αριθμός στο διάστημα [0,1]

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου του Burrel

Έστω ότι οι τυχαίοι αριθμοί RND είναι διαθέσιμοι, και χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό του αντιληπτού χρόνου διαδρομής για έναν μετακινούμενο, εφαρμόζοντας την σχέση

$$t_i^{\alpha\nu\tau\iota\lambda\eta\pi\tau\acute{o}\varsigma} = t_i^{\min} + RND \times (t_i^{\max} - t_i^{\min})$$

Σύνδεσμος	Ορθογωνική κατανομή χρόνου			Τυχαίος αριθμός	Αντιληπτός χρόνος συνδέσμου	Χαρακτηριστικά Διαδρομής: Διαδρομή	Ελάχιστος χρόνος	Μέγιστος χρόνος	Αντιληπτός χρόνος
(1)	(2)		(3)	(4)	(5) = (2) + (4)*[(3)-(2)]	(6)	(7) = Σ (2)	(8) = Σ (3)	(9) = Σ (5)
1	10	-	13	0,30376	10,91	ΑΓΔ	16	21	17,06
2	6	-	8	0,07187	6,14				
3	6	-	8	0,33467	6,67	ΑΒΔ	15	21	15,74
4	9	-	13	0,01803	9,07				
5	2	-	7	0,05334	2,27	ΑΒΓΔ	14	23	15,08

Επομένως ο συγκεκριμένος μετακινούμενος αντιλαμβάνεται ότι ο χρόνος μετακίνησης μέσω της διαδρομής ΑΓΔ είναι 17’, μέσω της διαδρομής ΑΒΔ 15,7’ και μέσω της διαδρομή ΑΒΓΔ ότι είναι 15’. Επομένως επιλέγει την διαδρομή ΑΒΓΔ.

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου του Burrel

Η διαδικασία προσδιορισμού της διαδρομής με τον μικρότερο αντιληπτό χρόνο επαναλαμβάνεται για όλους τους μετακινούμενους

	προσομοίωση μετακίνησης 1				προσομοίωση μετακίνησης 2				προσομοίωση μετακίνησης 3			
Σύνδεσμος	Τυχαίος αριθμός	Αντιληπτός χρόνος συνδέσμου	Αντιληπτός χρόνος διαδρομής		Τυχαίος αριθμός	Αντιληπτός χρόνος συνδέσμου	Αντιληπτός χρόνος διαδρομής		Τυχαίος αριθμός	Αντιληπτός χρόνος συνδέσμου	Αντιληπτός χρόνος διαδρομής	
(1)	(4)	(5) = (2) + (4)*[(3)-(2)]	(6)	(9) = Σ (5)	(4)	(5) = (2) + (4)*[(3)-(2)]	(6)	(9) = Σ (5)	(4)	(5) = (2) + (4)*[(3)-(2)]	(6)	(9) = Σ (5)
1	0,3877	11,16	ΑΓΔ	17,81	0,4267	11,28	ΑΓΔ	18,50	0,5801	11,74	ΑΓΔ	19,27
2	0,3247	6,65			0,6080	7,22			0,7660	7,53		
3	0,4042	6,81	ΑΒΔ	17,30	0,9130	7,83	ΑΒΔ	20,55	0,2460	6,49	ΑΒΔ	16,21
4	0,3723	10,49			0,9322	12,73			0,1800	9,72		
5	0,2276	3,14	ΑΒΓΔ	16,60	0,6163	5,08	ΑΒΓΔ	20,12	0,1821	2,91	ΑΒΓΔ	16,93

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου του Burrel

	προσομοίωση μετακίνησης 4				προσομοίωση μετακίνησης 5				προσομοίωση μετακίνησης 6			
Σύνδεσμος	Τυχαίος αριθμός	Αντιληπτός χρόνος συνδέσμου	Αντιληπτός χρόνος διαδρομής		Τυχαίος αριθμός	Αντιληπτός χρόνος συνδέσμου	Αντιληπτός χρόνος διαδρομής		Τυχαίος αριθμός	Αντιληπτός χρόνος συνδέσμου	Αντιληπτός χρόνος διαδρομής	
(1)	(4)	(5) = (2) + (4)*[(3)-(2)]	(6)	(9) = Σ(5)	(4)	(5) = (2) + (4)*[(3)-(2)]	(6)	(9) = Σ(5)	(4)	(5) = (2) + (4)*[(3)-(2)]	(6)	(9) = Σ(5)
1	0,1112	10,33	**ΑΓΔ**	16,95	0,7012	12,10	**ΑΓΔ**	19,87	0,9520	12,86	**ΑΓΔ**	20,07
2	0,3063	6,61			0,8834	7,77			0,6081	7,22		
3	0,7585	7,52	**ΑΒΔ**	17,51	0,4474	6,89	**ΑΒΔ**	16,46	0,6154	7,23	**ΑΒΔ**	16,82
4	0,2491	10,00			0,1415	9,57			0,1484	9,59		
5	0,4125	4,06	**ΑΒΓΔ**	18,19	0,1364	2,68	**ΑΒΓΔ**	17,34	0,2104	3,05	**ΑΒΓΔ**	17,50

Παράδειγμα εφαρμογής του αλγόριθμου του Burrel

Αθροίζοντας σε κάθε σύνδεσμο τους φόρτους που προέρχονται από κάθε μετακίνηση προκύπτει ο φόρτος σε κάθε σύνδεσμο του δικτύου

Μετα-κινούμενος	**Συντομότερη διαδρομή**	**φόρτος**	Φόρτος στον σύνδεσμο				
			1	***2***	***3***	***4***	***5***
1	ΑΒΓΔ	1		1	1		1
2	ΑΓΔ	1	1	1			
3	ΑΒΔ	1			1	1	
4	ΑΓΔ	1	1	1			
5	ΑΒΔ	1			1	1	
6	ΑΒΔ	1			1	1	
σύνολο			**2**	**3**	**4**	**3**	**1**

Η μέθοδος του Dial

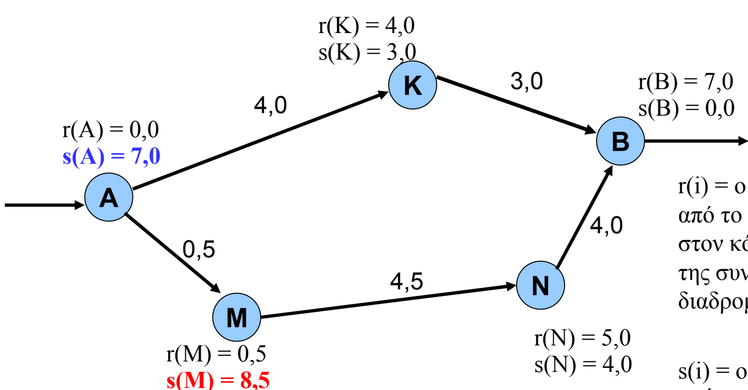
- Βασικές παραδοχές
  - Κάθε οδηγός αντιλαμβάνεται το κόστος διαφορετικά
  - Το αντιληπτό κόστος σε κάθε εναλλακτική διαδρομή ακολουθεί μια κατανομή τύπου Gumbel (δηλ., η κατανομή που χρησιμοποιείται στα μοντέλα διακριτών επιλογών τύπου Logit)
  - Ο καταμερισμός των μετακινήσεων μεταξύ δύο σημείων γίνεται με βάση την πιθανότητα επιλογής που εξαρτάται από τα κόστη των εναλλακτικών διαδρομών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν.
  - Ο αριθμός των διαδρομών που ενώνουν ένα ζεύγος σημείων μπορεί να είναι πολύ μεγάλος – εξαρτάται από τον αριθμό των κόμβων, των συνδέσμων και την γεωμετρία του δικτύου.
  - Κατά την διαδικασία επιλογής της διαδρομής οι μετακινούμενοι λαμβάνουν υπόψη μόνο ένα υποσύνολο όλων των δυνατών διαδρομών. Οι διαδρομές που λαμβάνονται υπόψη ονομάζονται λογικές διαδρομές
  - Η έννοια των λογικών διαδρομών απλοποιεί την διαδικασία υπολογισμού του καταμερισμού των φόρτων και εξασφαλίζει ότι εντελώς παράλογες διαδρομές, πχ. κυκλικές διαδρομές δεν λαμβάνονται υπόψη.

Η μέθοδος του Dial – λογικές διαδρομές

Μια διαδρομή θεωρείται λογική μόνο εφόσον προχωρεί διαδοχικά

α) πλησιάζοντας τον κόμβο προορισμού και ταυτόχρονα

β) απομακρύνεται από τον κόμβο προέλευσης



r(i) = ο χρόνος διαδρομής από το σημείο προέλευσης στον κόμβο i, κατά μήκος της συντομότερης διαδρομής

s(i) = ο χρόνος διαδρομής από το κόμβο i, στο σημείο προορισμού κατά μήκος της συντομότερης διαδρομής

Οι οδηγοί που θα ακολουθούσαν στην διαδρομή A-M-N-B, φθάνοντας στο M θα είχαν απομακρυνθεί από τον προορισμό τους : **s(M) > s(A)**

Η μέθοδος του Dial

- Για τον καταμερισμό των μετακινήσεων εφαρμόζεται η θεωρεία των διακριτών επιλογών και χρησιμοποιείται ένα μοντέλο τύπου Logit

$$P_k^{ij} = \frac{e^{-\theta . c_k^{ij}}}{\sum_m e^{-\theta . c_k^{ij}}} \qquad \forall\, k, i, j$$

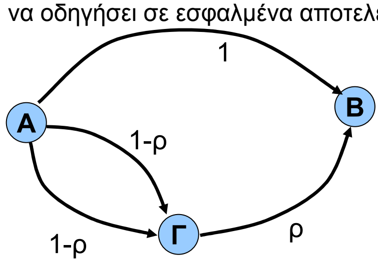
P_k^{ij} η πιθανότητα επιλογής της διαδρομής κ που συνδέει το ζεύγος Π-Π i-j

c_k^{ij} το κόστος της μετακίνησης μέσω της διαδρομής κ που συνδέει το ζεύγος Π-Π i-j

Ο μέθοδος χρησιμοποιεί αλγόριθμο που καταμερίζει τους φόρτους διαδοχικά από κόμβο σε κόμβο χωρίς να χρειάζεται απαρίθμηση όλων των διαδρομών. Επομένως μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την επίλυση μεγάλων δικτύων.

Κριτική θεώρηση των μεθόδων καταμερισμού που χρησιμοποιούν το μοντέλο Logit

Η εφαρμογή του μοντέλου Logit θα πρέπει να γίνεται με ιδιαίτερη προσοχή δεδομένου ότι λόγω των περιοριστικών παραδοχών στις οποίες βασίζεται μπορεί να οδηγήσει σε εσφαλμένα αποτελέσματα

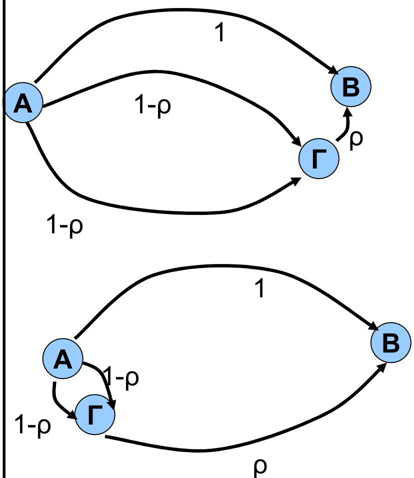


Παράδειγμα :

Στο δίκτυο υπάρχουν 3 διαδρομές που συνδέουν το ζεύγος Α-Β. Ο χρόνος διαδρομής σε κάθε μια από αυτές είναι ίσος με 1 μονάδα χρόνου. Οι δύο κάτω διαδρομές αλληλεπικαλύπτονται σε ένα ποσοστό του μήκους τους, ρ. $(0 < \rho < 1)$

Υπολογίστε το ποσοστό των μετακινούμενων που χρησιμοποιεί την κάθε διαδρομή χρησιμοποιώντας ένα μοντέλο Logit

Κριτική θεώρηση των μεθόδων καταμερισμού που χρησιμοποιούν το μοντέλο Logit



Όταν το ρ είναι πολύ μικρό είναι λογικό οι μετακινούμενοι να αντιλαμβάνονται ότι υπάρχουν 3 διαφορετικές εναλλακτικές διαδρομές, επομένως αφού οι χρόνοι διαδρομής είναι ίσοι, είναι λογικό η πιθανότητα να χρησιμοποιηθεί η κάθε διαδρομή είναι 33,33%

Όταν το ρ είναι πολύ μεγάλο είναι πιο πιθανό ότι μετακινούμενοι να αντιλαμβάνονται ότι υπάρχουν 2 διαφορετικές εναλλακτικές διαδρομές, και η πιθανότητα να χρησιμοποιηθεί η κάθε μια είναι 50%. Σε αυτή την περίπτωση όμως το logit με βάση την κωδικοποίηση του δικτύου θεωρεί 3 διαδρομές με ίσους χρόνους διαδρομής και επομένως υπολογίζει ότι η πιθανότητα να χρησιμοποιηθεί κάθε μια από αυτές είναι 33,33%. Επομένως στο τμήμα ΓΒ κυκλοφορεί το 66,66% των συνολικών μετακινούμενων.

Που οφείλεται το σφάλμα που εισάγει το Logit?

Κριτική θεώρηση των μεθόδων καταμερισμού που χρησιμοποιούν το μοντέλο Logit

- Μια βασική παραδοχή του μοντέλου Logit είναι ότι οι εναλλακτικές επιλογές που αξιολογεί είναι στατιστικά ανεξάρτητες. Στο παράδειγμα όμως που αναλύουμε υπάρχει μεγάλη αλληλοεπικάλυψη των δύο κάτω διαδρομών. Επομένως δεν είναι στατιστικά ανεξάρτητες και επομένως δεν μπορεί να εφαρμοσθεί το μοντέλο Logit
- Η ιδιότητα αυτή του logit σημαίνει ότι τα αποτελέσματα που δίνει ο αλγόριθμος του Dial επηρεάζονται από την τοπολογία του δικτύου.
- Όταν η συνθήκη στατιστικής ανεξαρτησίας των εναλλακτικών διαδρομών ισχύει, τότε ένα σωστά βαθμονομημένο μοντέλο logit που βασίζεται σε στοιχεία από ικανοποιητικό δείγμα, δίνει αξιόπιστα αποτελέσματα.
- Με κατάλληλη κωδικοποίηση του δικτύου και την εφαρμογή της αρχής των λογικών διαδρομών, είναι δυνατόν υπό ορισμένες προϋποθέσεις να αποτρέψουμε την δημιουργία στατιστικά εξαρτημένων διαδρομών.

Κριτική θεώρηση των μεθόδων καταμερισμού που χρησιμοποιούν το μοντέλο Logit

- Φαινόμενα υπερφόρτωσης συγκεκριμένων συνδέσμων όπως αυτό που παρουσιάσαμε προηγουμένως, είναι πιο έντονα στην περίπτωση που ο χρόνος διαδρομής θεωρείται ανεξάρτητος του φόρτου. Σε αντίθετη περίπτωση, υπερφόρτιση ενός συνδέσμου θα οδηγήσει σε μεγάλη αύξηση του χρόνου διαδρομής που θα οδηγήσει σε μείωση του φόρτου.
- Επομένως εφαρμογή της μεθόδου του Dial λαμβάνοντας υπόψη ότι χρόνος διαδρομής είναι συνάρτηση του φόρτου μειώνει τα φαινόμενα μη λογικής υπερφόρτωσης συγκεκριμένων συνδέσμων.
- Για την επίλυση του προβλήματος της στοχαστικής ισορροπίας σε οδικά δίκτυα και όταν ο χρόνος διαδρομής θεωρείται συνάρτηση του χρόνου, χρησιμοποιείται η τυποποίηση του ισοδύναμου προβλήματος βελτιστοποίησης.

Το ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης
του στοχαστικού καταμερισμού ισορροπίας

(Fisk *1980*)

$$\min z(\mathbf{x}) = -\sum_{rs} q_{rs}.E\left[\min_{k}\{C_k^{rs}\} \mid \mathbf{c}^{\mathbf{rs}}(\mathbf{x})\right] + \sum_a x_a.tt_a(x_a) - \sum_a \int_0^{x_a} tt_a(\omega)d\omega$$

α : σύνδεσμος του δικτύου

tt_α : συνάρτηση χρόνου διαδρομής του συνδέσμου i

ω : η μεταβλητή του προβλήματος βελτιστοποίησης (δηλ. ο κυκλοφοριακός φόρτος του συνδέσμου)

x_a : η βέλτιστη τιμή της μεταβλητής (δηλ. ο κυκλοφοριακός φόρτος ισορροπίας στον σύνδεσμο a)

q_{rs} : Οι μετακινήσεις του ζεύγους Π-Π r-s

C_k^{rs} : το κόστος διαδρομής από το r στο s κατά μήκος της διαδρομής k.

Επίλυση του στοχαστικού καταμερισμού ισορροπίας

- Ο αλγόριθμος επίλυσης είναι μια επαναληπτική διαδικασία. Σε κάθε επανάληψη καταμερίζεται ο φόρτος χρησιμοποιώντας τους αλγόριθμους στοχαστικής φόρτισης του δικτύου (π.χ. ο αλγόριθμος Dial, όπου οι χρόνοι διαδρομής θεωρούνται σταθεροί και ανεξάρτητοι από τους φόρτους). Η επίλυση του προβλήματος βελτιστοποίησης γίνεται με εφαρμογή της μεθόδου των διαδοχικών μέσων όρων.
- Ο αλγόριθμος ακολουθεί την διαδικασία που χρησιμοποιείται για την επίλυση του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης του ντετερμινιστικού καταμερισμού ισορροπίας.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Αλγόριθμός επίλυσης του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης

➔ Βήμα 0: Έναρξη

- Εφαρμογή της στοχαστικής φόρτισης του δικτύου (π.χ. Dial) με βάση τους χρόνους διαδρομής $t_a^0=t_a(0)$ για κάθε σύνδεσμο a. Ο καταμερισμός έχει σαν αποτέλεσμα τους φόρτους σε όλους τους συνδέσμους $\{x_a^1\}$.
- Έναρξη αρίθμησης επαναλήψεων, $n=1$

➔ Βήμα 1: Ενημέρωση :

- $t_a^n = t_a(x_a^n)$ για κάθε σύνδεσμο a.

➔ Βήμα 2: Προσδιορισμός κατεύθυνσης που ελαχιστοποιεί την συνάρτηση βελτιστοποίησης

- Εφαρμογή της στοχαστικής φόρτισης του δικτύου με βάση τους χρόνους διαδρομής t_a^n . Ο καταμερισμός έχει σαν αποτέλεσμα τους «*βοηθητικούς*» φόρτους σε όλους τους συνδέσμους $\{y_a^1\}$.

ΚΑΤΑΜΕΡΙΣΜΟΣ ΣΤΟ ΔΙΚΤΥΟ : Ισοδύναμο πρόβλημα βελτιστοποίησης

Αλγόριθμός επίλυσης του ισοδύναμου προγράμματος βελτιστοποίησης

➔ Βήμα 3: Υπολογισμός μέσων όρων.

- $x_a^{n+1} = x_a^n + (1/n).(y_a^n - x_a^n), \quad \forall\, \alpha.$

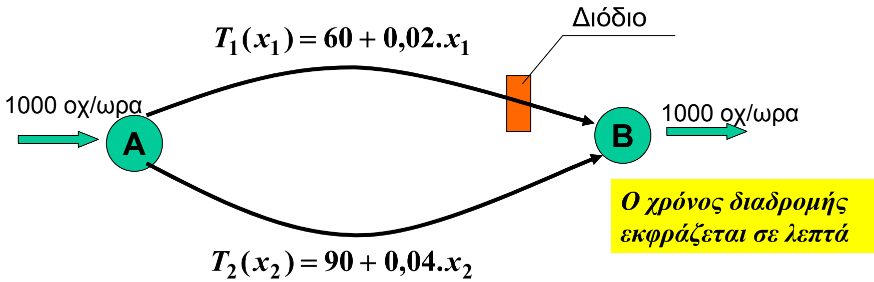
➔ Βήμα 4: Τέστ σύγκλισης.

- Εάν το κριτήριο σύγκλισης ικανοποιείται (π.χ. μικρή διαφορά μεταξύ των τιμών που προκύπτουν από διαδοχικές επαναλήψεις), ο αλγόριθμος τερματίζει και οι φόρτοι ισορροπίας είναι οι τελευταίοι φόρτοι που υπολογίσθηκαν $\{ x_a^{n+1} \}$, αλλιώς $n=n+1$ και πήγαινε στο βήμα 1.

Εφαρμογές ντετερμινιστικών και στοχαστικών μοντέλων καταμερισμού

- Τα μοντέλα στοχαστικού και ντετερμινιστικού καταμερισμού ισορροπίας χρησιμοποιούνται ευρέως για τις προβλέψεις κυκλοφοριακών φόρτων.
- Τα στοχαστικά μοντέλα παρέχουν πιο ρεαλιστική αναπαράσταση του προβλήματος, αλλά υπάρχουν θεωρητικά προβλήματα που απαιτούν περαιτέρω έρευνα
- Τα αποτελέσματα των στοχαστικών και ντετερμινιστικών μοντέλων συγκλίνουν σε κυκλοφοριακά υπερφορτισμένα δίκτυα.
- Η μέθοδος του στοχαστικού καταμερισμού στο δίκτυο χρησιμοποιήθηκε στις μελέτες πρόβλεψης των μετακινήσεων στο εθνικό οδικό δίκτυο της χώρας που εκπονήθηκαν το 1993 και το 2002.

Παράδειγμα: προσδιορισμός ύψους διοδίου



Οι πόλεις Α και Β συνδέονται μέσω της οδού 2 για την οποία η συνάρτηση του χρόνου διαδρομής δίδεται στο σχήμα.

Η νέα σύνδεση μέσω της οδού 1 προβλέπεται να κατασκευασθεί με σύμβαση παραχώρησης.

Να υπολογισθεί το ύψος του διοδίου που μεγιστοποιεί τα έσοδα από τα διόδια, έτσι ώστε να ελαχιστοποιηθεί η περίοδος παραχώρησης.

Η αξία του χρόνου είναι 7 ΕΥΡΩ/ώρα

Παράδειγμα: προσδιορισμός ύψους διοδίου

Από τα δεδομένα του προβλήματος προκύπτει ότι η γενική σχέση χρόνου διαδρομής – φόρτου εκφράζεται ως εξής:

$$T_i(x_i) = To_i + a_i.x_i$$

Επομένως

$$T_1(x_1) = 60 + 0{,}02.x_1 \qquad To_1 = 60 \qquad a_1 = 0{,}02$$

$$T_2(x_2) = 90 + 0{,}04.x_2 \qquad To_2 = 90 \qquad a_2 = 0{,}04$$

Δεδομένου ότι εφαρμόζεται χρέωση για την χρήση του νέας σύνδεσης, οι μετακινούμενοι θα πρέπει να σταθμίσουν τα οφέλη και κόστη κάθε διαδρομής και θα επιλέξουν την πιο συμφέρουσα.

Το κριτήριο που θα χρησιμοποιήσουν θα είναι η ελαχιστοποίηση του γενικευμένου κόστους.

Παράδειγμα: προσδιορισμός ύψους διοδίου

Έστω Β η αξία του χρόνου , Β = 7 ΕΥΡΩ/ωρα,

Ci το γενικευμένο κόστος μέσω της διαδρομής i

Δ το ύψος του διοδίου που θα εφαρμοσθεί

Q ο συνολικός φόρτος σε οχ/ωρα = 1000 οχ/ωρα

Το γενικευμένο κόστος για κάθε διαδρομή εκφράζεται με τις ακόλουθες σχέσεις:

$$C_1(x_1) = B.(To_1 + a_1.x_1) + \Delta$$

$$C_2(x_2) = B.(To_2 + a_2.x_2)$$

Στην κατάσταση ισορροπίας το κόστος διαδρομής θα είναι το ίδιο οποιαδήποτε διαδρομή και αν ακολουθήσει ο μετακινούμενος:

$$C_1(x_1) = C_2(x_2)$$

Παράδειγμα: προσδιορισμός ύψους διοδίου

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} C_1(x_1) = C_2(x_2) \\ C_1(x_1) = B.(To_1 + a_1.x_1) + \Delta \\ C_2(x_2) = B.(To_2 + a_2.x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$B.(To_1 + a_1.x_1) + \Delta = B.(To_2 + a_2.x_2)$$

Από την συνθήκη διατήρησης του φόρτου στους κόμβους Α και Β προκύπτει:

$$Q = x_1 + x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1 = Q - x_2$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad B.(To_1 + a_1.x_1) + \Delta = B.(To_2 + a_2.(Q - x_1))$$

Παράδειγμα: προσδιορισμός ύψους διοδίου

Εάν επιλύσουμε την σχέση:

$$B.(To_1 + a_1.x_1) + \Delta = B.(To_2 + a_2.(Q - x_1))$$

ως προς x_1, μπορούμε να υπολογίσουμε τον φόρτο ισορροπίας σαν συνάρτηση του ύψους του διοδίου Δ. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad B.To_1 + B.a_1.x_1 + \Delta = B.To_2 + B.a_2.Q - B.a_2.x_1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1.(B.a_1 + B.a_2) = B.(To_2 - To_1) + B.a_2.Q - \Delta \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = \frac{B.(To_2 - To_1) + B.a_2.Q - \Delta}{(B.a_1 + B.a_2)}$$

Τα έσοδα, E, όταν ο μέσος ωριαίος φόρτος ισούται με Q, υπολογίζονται με την σχέση:

$$\Rightarrow \quad E = x_1.\Delta$$

$\Rightarrow$

Παράδειγμα: προσδιορισμός ύψους διοδίου

$$\Rightarrow \quad E = x_1.\Delta = \frac{B.(To_2 - To_1) + B.a_2.Q - \Delta}{(B.a_1 + B.a_2)}.\Delta$$

Επομένως τα έσοδα έχουν εκφρασθεί σαν συνάρτηση του ύψους του διοδίου. Η τιμή του Δ που μηδενίζει την παράγωγο του E, είναι το διόδιο για τον οποίο μεγιστοποιούνται τα έσοδα:

$$\frac{dE}{d\Delta} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{B.(To_2 - To_1) + B.a_2.Q - 2\Delta}{(B.a_1 + B.a_2)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta = \frac{B.(To_2 - To_1) + B.a_2.Q}{2}$$

Το πρόβλημα μπορεί να λυθεί και με υπολογισμό των εσόδων για διαφορετικά επίπεδα διοδίου, και εντοπισμό εκείνης της τιμής που μεγιστοποιεί τα έσοδα.